Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 4

Ist K ein Körper, $f=\sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in K[X]$ und $A \in M_n(K)$, so setzt man $f(A):=\sum_{i=0}^{m} a_i A^i$.
Dabei setzt man wie üblich $A^0:=E$, und zur Bildung des Produkts aA multipliziert man jeden Koeffizienten der Matrix A mit dem Skalar a.

Die Abbildung $\Phi_A : K[X] \to M_n(K)$, $\Phi_A(f):=f(A)$ ist ein Ringhomomorphismus, genannt *Einsetzungshomomorphismus*. Dessen Kern ist also ein Ideal im Polynomring. Da dieser ein Euklidischer Ring und damit Hauptidealring ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $f \in K[X]$ mit $\ker \Phi_A = \langle f \rangle$.

Dieses Polynom nennt man auch *Minimalpolynom von A*.
Das Minimalpolynom ist also das normierte Polynom kleinsten Grades, für welches $f(A)=0$.

Ist χ_A das charakteristische Polynom von A, so besagt der Satz von Cayley-Hamilton, daß $\chi_A(A)=0$. Also ist das Minimalpolynom ein Teiler des charakteristischen Polynoms und somit ist jede Nullstelle des Minimalpolynoms von A ein Eigenwert von A.

Aufgabe 1

a) Sei $X \in M_n(K)$ eine invertierbare Matrix und $B = XAX^{-1}$. Zeigen Sie:
die Minimalpolynome von A und B stimmen überein.

b) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von A, so ist λ Nullstelle des Minimalpolynoms.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolyom der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$,

und vergleichen Sie es mit dem charakteristischen Polynom.

Aufgabe 2

Ist K algebraisch abgeschlossen und $A \in M_n(K)$, so zerfällt das charakteristische Polynom von A über K in Linearfaktoren.

Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert einer Matrix $A \in M_n(K)$, so definiert man die *verallgemeinerten Eigenräume zum Eigenwert* λ durch $E_\lambda^i := \{ x \in K^n \mid (\lambda E - A)^i(x) = 0 \}$ ($i \geq 1$). Offenbar gilt $E_\lambda^i \subset E_\lambda^{i+1}$ und $\{0\} \neq E_\lambda^1$. Da die Dimensionen der E_λ^i nicht über n hinaus wachsen können, gibt es einen Index n_λ, ab dem die Folge der E_λ^i nicht mehr wächst. Oft nennt man dann auch $E_\lambda := E_\lambda^{n_\lambda}$ *„den" verallgemeinerten Eigenraum von A zum Eigenwert* λ.

Die Definition $E_\lambda^0 := \{0\}$ ist häufig nützlich.

Das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z}_5)$ zerfällt (zufällig :-)) schon über $\mathbb{Z}_5$ in Linearfaktoren und besitzt insgesamt nur zwei verschiedene Nullstellen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_5$. Man berechne diese beiden Eigenwerte von *A*, finde Elemente $v_0 \in E_\lambda^{n_\lambda}, w_0 \in E_\mu^{n_\mu}$ mit $v_0 \notin E_\lambda^{n_\lambda - 1}, w_0 \notin E_\mu^{n_\mu - 1}$ und konstruiere rekursiv $v_{i+1} := A(v_i) - \lambda v_i$ und $w_{i+1} := A(w_i) - \mu w_i$, bis diese Vektoren Null werden.

Zeigen, daß (in diesem Fall) die v_i, w_j eine Basis von $\mathbb{Z}_5^5$ bilden, und berechnen Sie die Matrixdarstellung der durch *A* gegebenen linearen Abbildung $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ bezüglich dieser neuen Basis[1].

Aufgabe 3

Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Finden Sie eine Matrix mit reellen Koeffizienten und den Eigenwerten $1, z, \bar{z}$. Zeigen Sie, daß es sich um eine Rotation handelt.

1 d.h. ist *X* die Matrix, deren Spaltenvektoren die neu-konstruierten Basisvektoren sind, so berechne man $X^{-1} A X$.