Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 3

Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$ eine *nxn*-Matrix mit Koeffizienten in K.
Ist $x \in K^n, x \neq 0$ ein Eigenvektor von A mit dem Eigenwert $\lambda \in K$, $Ax = \lambda x$, so folgt $0 = \lambda x - Ax = (\lambda E - A)(x)$, so daß die Matrix $\lambda E - A$ nicht invertierbar ist und damit $\det(\lambda E - A) = 0$ gilt. Umgekehrt folgt aus letzterer Gleichung, daß λ ein Eigenwert ist und die von Null verschiedenen Vektoren des Kerns von $\lambda E - A$ zugehörige Eigenwerte sind.
Berechnet man den Ausdruck $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$, so erhält man ein Polynom n-ten Grades in der Unbestimmten λ, das sogenannte *charakteristische Polynom*, dessen Nullstellen sämtlich Eigenwerte von A sind.

Es kommt nun auf den Körper K an, wieviele Nullstellen ein Polynom n-ten Grades besitzt; in einem *algebraisch abgeschlossenen Körper*, wie z.B. $\mathbb{C}$, sind es – Vielfachheiten mitgezählt – genau n Stück.

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$.
Finden Sie alle Eigenwerte, also Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A und die zugehörigen Eigenvektoren.

b) Zeigen Sie, daß das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$ keine Nullstelle besitzt. Zeigen Sie, daß ein Polynom dritten Grades in $\mathbb{Z}_5[X]$ irreduzibel ist, wenn es keine Nullstelle besitzt. Natürlich gibt es trotzdem Eigenwerte, aber diese liegen in einem Erweiterungskörper von $\mathbb{Z}_5$, ähnlich wie in 1c), wo dies genauer auszuführen ist.

c) Betrachten Sie $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Berechnen Sie auch hier das charakteristische Polynom $f = \chi_x(A)$, und zeigen Sie, daß es irreduzibel ist. Bilden Sie dann den Körper $K = \mathbb{Z}_5[X]/\langle f \rangle$, welcher 25 Elemente besitzt. Finden Sie zwei Nullstellen von f in K [1]. Da $\mathbb{Z}_5$ als Teilmenge bzw. sogar Unterkörper von K aufgefaßt werden kann, läßt sich die Matrix A als Element von $M_2(K)$ auffassen. Berechnen Sie Eigenvektoren zu den eben gefundenen Eigenwerten im Vektorraum K^2.

---

1 Dazu könnte man einerseits mit Pari alle 25 Elemente von K durchtesten. Andererseits bekommt man durch die spezielle Darstellung von K eine Nullstelle η von f in K geschenkt. Man überlege sich, wieso η^5 eine weitere Nullstelle ist und berechne diese.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie: die Eigenwerte einer reellen symmetrischen 2x2 Matrix sind immer reell.
b) Zeigen Sie: die Eigenwerte einer reellen symmetrischen 3x3 Matrix sind immer reell.

Aufgabe 3

a) Man benutze den Euklidischen Algorithmus, um die gemeinsamen Nullstellen der reellen Polynome $f=x^6+5x^5+11x^4+12x^3+9x^2+3x+1$ und $g=x^7+5x^6+24x^5+39x^4+50x^3+51x^2+35x+20$ herauszufinden.

b) Sonderaufgabe: Seien *f,g* Polynome in *K*[*X*] , $f=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ vom Grade *m* bzw. *n*

Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$, in deren Zeilen die Koeffizienten rechts von a_m bzw. b_n mit Nullen aufzufüllen sind und bei der *n* Zeilen für *f* und *m* Zeilen für *g* vorgesehen sind, nenn man *Resolvente* von *f,g* . Zeigen Sie:

Die Resolvente ist genau dann Null, wenn *f,g* einen gemeinsamen Faktor besitzen.

c) Man betrachte das Polynom $f=x^5+10x^4+2x^3+24x^2+6x+5$. Es besitzt 5 komplexe Nullstellen $z_1,\ldots,z_5$. Man gebe ein Polynom an (d.h. seine Koeffizienten), welches die Nullstellen $\frac{1}{z_1},\ldots,\frac{1}{z_5}$ besitzt.