Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 1

Aufgabe 1

Sei R ein Ring mit 1 .

Gibt es zu $e \in R$ ein $e' \in R$ mit $e \cdot e' = 1$ und $e' \cdot e = 1$, so nennt man e eine „Einheit“. Die Einheiten sind also die Elemente, die ein multiplikativ Inverses besitzen.

a) Man zeige, daß die Einheiten in R eine Gruppe bezüglich der Ringmultiplikation bilden. (Dabei ist R nicht unbedingt nullteilerfrei oder kommutativ!)

b) Man bestimme die Einheitengruppen der folgenden Ringe:

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$.

Wieso handelt es sich bei $\mathbb{Z}[\omega]$ überhaupt um einen Ring?

c) Man zeige: enthält ein Ideal $I \subset R$ eine Einheit, so ist $I = R$.

Aufgabe 2

a) Man zeige, daß die Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ sämtlich Hauptidealringe sind. (Hinweis: man gehe ähnlich vor wie bei $\mathbb{Z}$.)

b) Man schreibe alle Ideale von $\mathbb{Z}_{45}$ explizit hin.

c) Man gebe ein Ideal im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ an, welches kein Hauptideal ist.

Aufgabe 3

Sei $R := \{f :]0,1[\to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$.
R ist ein kommutativer Ring mit Eins via $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$
Welches ist das neutrale Element der Addition, welches das der Multiplikation?

a) Ist dieser Ring nullteilerfrei? (Beweis!)

Ein Ideal I heißt maximal, wenn es kein nicht-triviales Ideal J Ideal gibt mit $I \subset J$, $I \neq J$.

b) Sei $0 < x_0 < 1$. Wieso ist $I(x_0) := \{f \in R \mid f(x_0) = 0\}$ ein maximales Ideal in R ?