Jordansche Normalform

Eine Jordan-Matrix $A \in M_n(K)$ hat definitionsgemäß eine Block-Form: $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$.

Dabei sind die A_j selbst quadratische Matrizen mit der Blockform $A_j = \begin{pmatrix} A_j^1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_j^{l_j} \end{pmatrix}$.

Die quadratischen Matrizen A_j^i auf dieser Ebene schließlich haben die Gestalt

$$A_j^i = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} :$$

auf der Hauptdiagonalen steht in allen A_j^i der Skalar λ_j , auf der Nebendiagonalen – sofern vorhanden - der Skalar 1, alle übrigen Einträge sind Null. Die λ_j werden als paarweise verschieden angenommen.

Ist n_j^i die Zeilen- bzw. Spaltenzahl der Matrix A_j^i und n_j die Zeilen- bzw. Spaltenzahl der Matrix A_j , so ergeben sich die Summen $n = n_1 + \ldots + n_k$, $n_j = n_j^1 + \ldots + n_j^{l_j}$.

Das charakteristische Polynom von *A* ist das Produkt der charakteristischen Polynome der A_j ; das charakteristische Polynom von A_j wieder das Produkt der charakteristischen Polynome der A_j^i , das charakteristische Polynom von A_j^i schließlich ist $(X - \lambda_j)^{n_j^i}$, so daß sich ergibt:

$\chi_A = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_k)^{n_k}$ Die λ_j sind also die verschiedenen Eigenwerte von *A*.

Beispiel: die folgende 10x10-Matrix ist eine Jordan-Matrix mit $\chi_A = (X-2)^6 \cdot (X-3)^4$.
Diese Matrix hat 2 als 6fachen und 3 als vierfachen Eigenwert.
Das Minimalpolynom ist $m_A = (X-2)^3 \cdot (X-3)^2$, wie man sofort nachprüft.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & & & \\ & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & \\ & & & & & & 3 & 1 & & \\ & & & & & & & 3 & & \\ & & & & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

Überall, wo „nichts“ steht, muß man sich natürlich Nullen denken.

Zwei quadratische Matrizen A,B heißen äquivalent, wenn es eine invertierbare Matrix X gibt mit $A = XBX^{-1}$. Dadurch wird auch tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert.

Der Satz über die Jordansche Normalform kann jetzt so formuliert werden:

Satz: Jede quadratische Matrix ist äquivalent zu einer Jordan-Matrix.

Oder so:

Satz: Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ läßt sich eine Basis von V angegeben, bezüglich der die Matrixdarstellung von φ eine Jordan-Matrix ist.

In beiden Fällen benötigt man die Voraussetzung, daß das charakteristischen Polynom der Matrix bzw. der linearen Abbildung im zu Grunde liegenden Körper in Linearfaktoren zerfällt, was in einem algebraisch vollständigen Körper wie z.B. $\mathbb{C}$ der Fall ist.

Ein Beweis erfolgt in einer späteren Version dieses Dokuments.