

## Diskriminante

Sei  $f \in K[X]$   $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  ein normiertes Polynom  $n$ -ten Grades mit Koeffizienten in einem Körper  $K$ . Es gibt einen Erweiterungskörper  $E \supset K$ , über dem  $f$  in Linearfaktoren zerfällt:

$f = \prod_{i=1}^n (X - \zeta_i)^{n_i}$ , wobei die  $\zeta_i \in E$  Nullstellen von  $f$  sind. Dabei darf natürlich eine Nullstelle auch mehrfach vorkommen.

### Der quadratische Fall

Den Ausdruck  $D(f) = \prod_{i < j} (\zeta_i - \zeta_j)^2$  nennt man auch Diskriminante des Polynoms. Dieser Ausdruck ist symmetrisch in den Nullstellen von  $f$ , und man kann zeigen, daß die Diskriminante aus diesem Grund allein mit Hilfe der Koeffizienten von  $f$  ausdrückbar sein muß. Dies werden wir gleich an einigen Beispielen sehen.

Vorher stellen wir noch fest, daß die Diskriminante offenbar genau dann Null wird, wenn mindestens eine Nullstelle von  $f$  mehrfach vorkommt.

Ist  $f = x^2 + px + q$ , so wissen wir aus der Schule, daß die beiden Nullstellen von  $f$  die Gestalt  $\zeta_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ , was natürlich voraussetzt, daß wir in  $K$  Wurzeln ziehen können, und daß wegen der 2 im Nenner die Charakteristik von  $K$  nicht 2 ist.

Nach obiger Formel ist jetzt die Diskriminante gleich

$$D(f) = \prod_{i < j} (\zeta_i - \zeta_j)^2 = (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = \frac{1}{4} \left( (-p + \sqrt{p^2 - 4q}) - (-p - \sqrt{p^2 - 4q}) \right)^2 = p^2 - 4q.$$

Unschön ist, daß wir eine Formel für das Wurzelziehen benutzten, um die Diskriminante zu finden.

Dies läßt sich grundsätzlich durch Benutzung der Vieta'schen Wurzelsätze beweisen:

$$p = -(\zeta_1 + \zeta_2), \quad q = \zeta_1 \zeta_2$$

$$D(f) = (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = \zeta_1^2 - 2\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2^2 = (\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2^2) - 4\zeta_1 \zeta_2 = p^2 - 4q$$

Ist  $K = \mathbb{R}$ , so können wir mit Hilfe der Diskriminante auch feststellen, ob  $f$  zwei reelle oder zwei konjugiert komplexe Wurzeln besitzt. Im ersten Fall ist sie nämlich positiv, im zweiten negativ, wie man leicht nachrechnet.

### Der kubische Fall

An dieser Stelle betrachten wir wir noch die Diskriminante eines normierten Polynoms dritten Grades. Gehen wir aus von  $f = y^3 + ay^2 + by + c$ , so stellen wir zunächst fest, daß durch die

Substitution  $\left(x - \frac{a}{3}\right) \rightarrow y$  dieses Polynom übergeht in  $x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c\right)$ , was den Vorteil besitzt, daß wir nun keinen Term 2. Grades mehr haben und dadurch viele Rechnungen einfacher werden. Durch Addition von  $\frac{a}{3}$  wird aus jeder Nullstelle dieses neuen Polynoms ja wieder eine des alten. Auch Fragen nach mehrfachen Nullstellen oder danach, ob es z.B. bei reellen Koeffizienten auch drei reelle Nullstellen gibt, sind für beide Polynome äquivalent.

### Der reduzierte Fall

Daher begnügen wir uns mit der Berechnung der Diskriminante eines Polynoms der Form

$$f = x^3 + px + q \quad .$$

Die Wurzelsätze haben jetzt die Form:

$$0 = -(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3), \quad p = (\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3), \quad -q = \zeta_1\zeta_2\zeta_3$$

woraus sich ergibt:  $\zeta_3 = -(\zeta_1 + \zeta_2)$ ,  $p = -z_1^2 - z_2z_1 - z_2^2$ ,  $q = z_2z_1^2 + z_2^2z_1$

Für die Diskriminante ergibt sich:

$$\left((\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_3)\right)^2 = 4z_1^6 + 12z_1^5z_2 - 3z_1^4z_2^2 - 26z_1^3z_2^3 - 3z_1^2z_2^4 + 12z_1z_2^5 + 4z_2^6 = -(4p^3 + 27q^2)$$

Es sei zugegeben, daß es unbefriedigend dies zu behaupten: es läßt sich aber jedenfalls leicht nachrechnen. Die Frage ist ja, wie man auf den Ausdruck  $-(4p^3 + 27q^2)$  hätte kommen können. Dazu nun folgendes Argument:

Man weiß, daß die Diskriminante genau dann verschwindet, wenn das Polynom eine doppelte Nullstelle besitzt.

Also mache man in den obigen Formeln den Ansatz  $\zeta_1 = \zeta_2$  und erhält  $p = -3\zeta_1^2$ ,  $q = 2\zeta_1^3$  und sieht jetzt ganz offensichtlich, daß  $f$  genau dann eine doppelte Nullstelle besitzt, wenn

$4p^3 + 27q^2 = 0$ . Also wird dieser Ausdruck oder sein additiv Inverses die Diskriminante sein: was der Fall ist, überprüft man durch Nachrechnen in der obigen Gleichung.

Eine systematische Untersuchung solcher Fragen geschieht in der sogenannten *Invariantentheorie* und rechnerisch mit der Hilfe von *Gröbner Basen*.

Im Falle  $K = \mathbb{R}$  rechnet man auch wieder leicht nach, daß die Diskriminante bei drei reellen Wurzeln des Polynoms positiv und bei einer reellen und zwei komplexen Nullstellen des Polynoms negativ ist.