

Bemerkungen zu Projektiven Räumen

Betrachten wir einen Körper K und einen n -dimensionalen K -Vektorraum V .

Ist $U \subset V$ ein Unterraum und $x \in U$, so liegt die Nebenklasse $x+U = \{x+u | u \in U\}$ um den Vektor x verschoben parallel zu U . So eine Nebenklasse nennt man dann auch einen m -dimensionalen *affinen Unterraum*. Einen 1-dimensionalen affinen Unterraum nennt man eine *affine Gerade*, einen 2-dimensionalen affinen Unterraum eine *affine Ebene*. Der m -dimensionale Untervektorraum U ist natürlich auch selbst ein affiner Unterraum, der aber die Besonderheit besitzt, daß er den Nullvektor enthält.

Denken wir uns speziell den \mathbb{R}^3 , so sieht man intuitiv, daß sich zwei affine Ebenen in einer affinen Geraden schneiden, es sei denn, die Ebenen sind parallel.

Die projektive Geometrie soll sicherstellen, daß sich parallele affine Unterräume zumindest „im Unendlichen“ schneiden und sie soll dieses Unendliche präzisieren.

Wenn man dies wie in der Vorlesung tut, sieht man, daß der eindimensionale projektive Raum

$\mathbb{P}(K)$ genauoviele Punkte enthält wie K , sowie einen einzigen zusätzlichen Punkt:

$$\mathbb{P}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x, y \in K, (x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die Abbildung $K \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $x \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ ist ja bijektiv. Die Menge

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ steht aber auch in bijektiver Beziehung zur affinen Gerade}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in K \right\} \subset K^2.$$

Man nennt einen eindimensionalen projektiven Raum auch eine projektive Gerade, und die obige

Zerlegung $\mathbb{P}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \mid x \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ könnte man so benennen: Eine projektive Gerade besteht aus einer affinen Gerade und einem zugehörigen unendlich fernen Punkt.

Man muß sich aber klarmachen, daß $\mathbb{P}(K)$ ein völlig symmetrisches Gebilde ist. Welche Punkte als „unendlich fern“ zu betrachten sind, hängt von der Wahl der affinen Gerade in K^2 ab, auf die

projiziert wird. Z.B. könnte man die Zerlegung $\mathbb{P}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \mid x \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ hernehmen oder von jeder anderen affinen Ebene in K^2 , die nicht die Null enthält, ausgehen. Die "Punkte" von

$\mathbb{P}(K)$ entsprechen dann jeweils denen der affinen Ebene sowie einem weiteren Punkt.

Ist nun $K = \mathbb{C}$, so hat man wie oben $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, d.h. der

eindimensionale komplex projektive Raum enthält einen Punkt mehr als \mathbb{C} selbst.

Die stereographische Projektion vom Nordpol der Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ auf die als xy-Ebene gedachten komplexen Zahlen bildet nun $S^2 - \{N\}$ bijektiv auf die komplexen Zahlen ab. Da auch S^2 einen

Punkt mehr enthält als $S^2 - \{N\}$ ist es klar, daß es eine bijektive Beziehung zwischen $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ und S^2 gibt.

Dagegen kann man sich den Raum $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vorstellen als zusammengesetzt aus einer affinen Ebene, die im Unendlichen von einer reellen projektiven Gerade berandet wird. Eine projektive Gerade kann man sich wieder vorstellen als zusammengesetzt aus einer affinen Geraden und einem weiteren Punkt. Diese Zerlegung sieht konkret so aus:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in K, (x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \text{ oder } z \neq 0) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in K (x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0) \right\} =$$

affine Ebene \cup projektive Gerade =

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in K \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

affine Ebene \cup affine Gerade \cup Punkt

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *soll* also nicht nur einen unendlich fernen Punkt enthalten, sondern deutlich mehr. Nur so ist garantiert, daß reell projektive Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sich immer in genau einem Punkt schneiden.

Dagegen macht der Begriff *reell projektive Gerade* in $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ gar keinen Sinn. $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ ist selbst eine *komplex projektive Gerade* und die einzig sinnvollen niederdimensionalen Untergebilde sind Punkte.

Die Projektion mit Hilfe von Geraden durch den Nullpunkt im \mathbb{R}^3 auf die durch $z=1$ gegebene affine Ebene realisiert die obige Zerlegung. Gleichzeitig schneidet jede dieser Geraden die Sphäre S^2 in zwei gegenüberliegenden Punkten. Daß die Projektion mittels Geraden durch den Nordpol auf die durch $z=1$ gegebene Ebene zur Zerlegung $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ führt, ist davon völlig unabhängig.

Dies sind ganz verschiedene Abbildungen, obwohl in beiden Fällen mit Geraden gearbeitet wird, die durch einen Punkt gehen und dann eine Ebene schneiden. Einmal haben wir

Ebene $\overset{\text{bijektiv}}{\leftrightarrow} S^2 - \{N\}$, das andere Mal

Ebene $\overset{\text{bijektiv}}{\leftrightarrow} \{\text{Punktpaare auf } S^2\} - \{\text{Punktpaare auf Äquator}\}$.