Die Dimension eines Vektorraums

Sei K ein kommutativer Körper und V ein K-Vektorraum.

Falls V eine endliche Basis $v_1, \ldots, v_n$ besitzt, definiert man die **Dimension** von V (über K) als die **Anzahl der Elemente dieser Basis** und schreibt $\dim_K V = n$ **.**
Damit dies Sinn macht, muß gezeigt werden, daß verschiedene Basen von V dieselbe Elementezahl besitzen. Einen Beweis führen wir auf der nächsten Seite.

Man setzt $\dim_K V = \infty$, falls V keine endliche Basis besitzt, und $\dim_K V = 0$, wenn V nur aus einem Element (Punkt) besteht.

Ist $\dim_K V < \infty$, so nennt man V (über K) endlichdimensional, sonst unendlichdimensional.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $\dim K^n = n$.

Ist $\dim_K V = n < \infty$, so gibt es einen Vektorraumisomorphismus $\varphi\colon K^n \to V$. Man nehme dazu einfach eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und setze $\varphi(e_i) = v_i$. Wir haben gelernt, daß ein Vektorraum-homomorphismus durch Vorgabe der Werte auf einer Basis eindeutig gegeben wird. Analog wird durch $\psi(v_i) = e_i$ ein Homomorphismus $\psi : V \to K^n$ definiert. Da $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ auf einer Basis mit der Identität übereinstimmen, hat man $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_V$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K^n}$. Damit ist φ injektiv und surjektiv und daher ein Isomorphismus.

Der Begriff der Dimension ist invariant unter Vektorraumisomorphismen, d.h. sind V, W K-Vektorräume und ist $\varphi : V \to W$ ein Vektorraumisomorphismus, gilt $\dim_K V = \dim_K W$.
Ein Isomorphismus bildet nämlich eine Basis auf eine Basis ab.

Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, d.h. ist U eine additive Untergruppe von V und gilt $\forall \lambda \in K \; \forall x \in U : \lambda x \in U$, so ist $\dim_K U \leqslant \dim_K V$. Ist $\dim_K V < \infty$, so ist $\dim_K U = \dim_K V$ gleichbedeutend mit $U = V$.

Diese wichtige Aussage beweisen wir am Schluß des Kapitels.

Bemerkungen:
Bei der Dimension kommt es wesentlich auf den Körper an:

Beispielsweise hatten wir ja definiert $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Damit ist $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ natürlich eindimensional und $1 \simeq (1,0)$ ist Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$, aber als Vektorraum über $\mathbb{R}$ zweidimensional, und (1,0) und (0,1) sind Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ ist als Vektorraum über sich selbst eindimensional mit 1 als Basis, als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ dagegen unendlichdimensional: ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum ist nämlich isomorph zu und damit bijektiv abbildbar auf $\mathbb{Q}^n$, also abzählbar; weil $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, kann $\mathbb{R}$ demnach kein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$ sein.

Im übrigen ist jeder Körper E ein Vektorraum über jedem Unterkörper $K \subset E$: Ist $\lambda \in K$ und $x \in E$, so ist ja auch $\lambda \in E$ und man kann in E das Produkt λx bilden und hat damit eine Multiplikation mit „Skalaren“ $K \times E \to E$. Und so ist eben $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Ein Vektorraum über E ist auch automatisch ein Vektorraum über K . Ist $\dim_E V = n$ und $\dim_K E = k$, so ist $\dim_K V = n k$ (Übungsaufgabe!)

Beweise:

1. Es soll gezeigt werden:

Sind $v_1,\ldots,v_n$, $w_1,\ldots,w_m$ Basen von V, so ist m=n .

Die Beweisidee ist jetzt folgende:
Sei oBdA $n\leqslant m$. Man tauscht die Basiselemente v_i der ersten Basis nacheinander gegen geeignete Basiselemente $w_{\sigma(i)}$ der zweiten Basis aus, unter Beibehaltung der Basiseigenschaft. Zum Schluß hat man dann $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(n)}$ als Basis.

Wäre jetzt $n<m$, so könnte jedes verbleibende Element der zweiten Basis als Linearkombination der $w_{\sigma(i)}$ geschrieben werden; dies würde bedeuten, daß $w_1,\ldots,w_m$ gar nicht linear unabhängig sind.

Also muß m=n gelten.

Hier nun der Austauschprozeß:
Nehmen wir an, $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_k,\ldots,v_n$ sei Basis, wir hätten also schon (k-1) Elemente ausgetauscht. Dabei lassen wir den Fall k=1 zu, was bedeuten soll, daß man noch am Beginn der Austauschaktion steht, also noch von $v_1,\ldots,v_n$ ausgeht.

Es soll gezeigt werden, daß ein Basiselement $w_{\sigma(k)}$ gewählt werden kann, so daß auch $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_n$ eine Basis ist. Dabei wird der Fall k=n mit betrachtet, bei dem man am Ende des Austauschprozesses steht und $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(n)}$ als Basis erhält.

Diejenigen Basiselemente der zweiten Basis, die noch nicht unter $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)}$ vorkommen, bezeichnen wir kurzerhand mit $w_{\tau(k)},\ldots,w_{\tau(m)}$.

Jedes der $w_{\tau(j)}$ läßt sich als Linearkombination der $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_k,\ldots,v_n$ schreiben. Dabei muß es mindestens ein $w_{\tau(j)}$ geben, für das der zugehörige Linearkoeffizient von v_k von Null verschieden ist. Anderenfalls ließen sich ja alle w_j als Linearkombinationen bereits der (n-1)-elementigen Menge $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_{k+1},\ldots,v_n$ darstellen. Der Vektor v_k läßt sich nicht als Linearkombination aus $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_{k+1},\ldots,v_n$ schreiben, sonst wäre $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_k,\ldots,v_n$ nicht linear unabhängig. v_k ist aber eine Linearkombination der w_j , die ja eine Basis bilden; wenn nun alle w_j Linearkombination von $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_{k+1},\ldots,v_n$ wären, dann auch v_k .

Wir nehmen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß in der Darstellung

$$(*) \qquad w_{\tau(k)}=\sum_{j=1}^{k-1}\mu_j w_{\sigma(j)}+\mu_k v_k+\sum_{j=k+1}^{n}\mu_j v_j$$

der Koeffizient μ_k nicht verschwindet.

Wir setzen nun $\sigma(k)=\tau(k)$ und zeigen, daß $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_n$ Basis von V ist.

1. Lineare Unabhängigkeit:
Nehmen wir an, $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_n$ seien nicht linear unabhängig.

Dann gibt es eine Darstellung (**) $0=\sum_{j=1}^{k-1} \kappa_j w_{\sigma(j)}+\kappa_k w_{\sigma(k)}+\sum_{j=k+1}^{n} \kappa_j v_j$
bei der nicht alle Linearkoeffizienten verschwinden. Insbesondere muß dann $\kappa_k \neq 0$ sein. Wäre nämlich $\kappa_k=0$, so müßten wegen der linearen Unabhängigkeit von $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_{k+1},\ldots,v_n$ auch die übrigen Koeffizienten Null sein. Setzen wir (*) in (**) ein, so ergibt sich

$$0=\sum_{j=1}^{k-1} \kappa_j w_{\sigma(j)}+\kappa_k\left(\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j w_{\sigma(j)}+\mu_k v_k+\sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j\right)+\sum_{j=k+1}^{n} \kappa_j v_j=$$
$$\sum_{j=1}^{k-1} (\kappa_j+\kappa_k \mu_j) w_{\sigma(j)}+\kappa_k \mu_k v_k+\sum_{j=k+1}^{n} (\kappa_j+\kappa_k \mu_j) v_j$$

Hier wird also die Null als Linearkombination der Basis $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_k,\ldots,v_n$ dargestellt. Daher sind alle Linearkoeffizienten Null; insbesondere ist $\kappa_k \mu_k=0$ und damit $\kappa_k=0$ oder $\mu_k=0$. Beides war aber vorher ausgeschlossen: also ist $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_n$ doch linear unabhängig.

2. $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_n$ ist Erzeugendensystem.
Wir brauchen nur zu zeigen, daß sich v_k aus diesen Elementen erzeugen läßt. Dann lassen sich $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k-1)},v_k,\ldots,v_n$ erzeugen, und diese Vektoren sind bereits als Basis und damit als Erzeugendensystem bekannt. Wenn sich aber alle Vektoren eines Erzeugendensystems erzeugen lassen, dann jeder Vektor.

Wir schreiben dazu die Gleichung (*) um:
$$v_k=\sum_{j=1}^{k-1} \left((-\mu_k)^{-1} \mu_j\right) w_{\sigma(j)}+(\mu_k)^{-1} w_{\sigma(k)}+\sum_{j=k+1}^{n} \left((-\mu_k)^{-1} \mu_j\right) v_j .$$
Dies ist aber genau eine Darstellung von v_k als Linearkombination aus $w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_n$.

2. Sei $U \subset V$ ein Teilraum und V endlichdimensional. Dann ist $\dim U \leqslant \dim V$. Im Falle $\dim U = \dim V$ ist $U=V$.

Wir führen jetzt einen Induktionsbeweis über die Dimension von V.

Ist V nulldimensional, so ist definitionsgemäß $V=\{0\}$. Damit ist auch $U=\{0\}$. Man hat also $0=\dim U=\dim V$ und $U=V$.

Wir gehen jetzt davon aus, unsere Aussage sei bereits bewiesen jeden beliebigen (n-1)-dimensionalen Raum V , dabei wird ausdrücklich der eben bewiesene Grenzfall n=1 mitbedacht. Es soll gezeigt werden, daß sie dann auch für jeden n-dimensionalen Raum gilt.

Sei also $n \geqslant 1$ und $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis von V. und $\dim V=n$.
Ist $U=\{0\}$, so ist $0=\dim U < \dim V=n$, und es braucht nichts weiter gezeigt zu werden.

Enthält U einen Vektor $w \neq 0$, so haben wir eine eindeutige Darstellung $w=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, bei der nicht alle Linearkoeffizienten verschwinden; sei also oBdA $\lambda_n \neq 0$. Damit ergibt sich $v_n=\sum_{i=1}^{n-1} (-\lambda_n^{-1} \lambda_i) v_i+\lambda_n^{-1} w=\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i v_i+\mu w$. Entscheidend ist jetzt, daß auch $v_1,\ldots,v_{n-1},w$ eine Basis von V ist. Ähnliches kennen wir bereits aus dem vorigen Beweis.

a) Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i + \kappa w = 0$. Es ergibt sich

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i + \kappa w = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i + \kappa \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i + (\kappa \lambda_i) \right) v_i + \kappa \lambda_n v_n .$$

Wir haben also eine Linearkombination der Null aus der Basis $v_1, \dots, v_n$, d.h. alle Linearkoeffizienten sind Null. Aus $\kappa \lambda_n = 0$ folgt $\kappa = 0$, und damit folgt aus $\kappa_i + (\kappa \lambda_i) = 0$, daß auch alle κ_i gleich Null sind.

b) Erzeugendensystem

Sei $x \in V$. Es gibt eine Darstellung von x

$$x = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i + \kappa_n v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i v_i + \kappa_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i v_i + \mu w \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (\kappa_i + \kappa_n \mu_n) v_i + (\kappa_n \mu) w$$

als Linearkombination aus $v_1, \dots, v_{n-1}, u$.

Wir betrachten jetzt den eindimensionalen Unterraum $W := <w>$. Es ist $W \subset U \subset V$.
Damit ist offenbar auch U/W ein Unterraum von V/W .
Auch wissen wir bereits, daß $v_1, \dots, v_{n-1}$ Basis von V/W, dieser Raum also (n-1)-dimensional ist.
Lt. Voraussetzung wissen wir, daß der Unterraum U/W von V/Weine Dimension kleiner oder gleich m-1 besitzt, also eine Basis $\overline{u_1}, \dots, \overline{u_{m-1}}$ mit $m \leqslant n$.

Es läßt sich jetzt leicht zeigen, daß $u_1, \dots, u_{m-1}, w$ eine Basis von U sein muß.

a) Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i u_i + \kappa w = 0$.

Daraus folgt $\overline{0} = \overline{\sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i u_i + \kappa u} = \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i \overline{u_i} + \kappa \overline{w}$.

Wegen $u \in W$ ist $\overline{u} = \overline{0}$, also haben wir $\overline{0} = \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i \overline{u_i}$ und wegen der Basiseigenschaft von $\overline{u_1}, \dots, \overline{u_{m-1}}$ sind die κ_i gleich Null . Wegen $w \neq 0$ muß dann auch κ ungleich Null sein.

b) Erzeugendensystem

Sei $x \in U$. Zunächst gibt es eine Darstellung $\overline{x} = \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i \overline{u_i} = \overline{\sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i u_i}$. Dies bedeutet $x - \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i u_i \in W$.
Jeder Vektor in W läßt sich aber als skalares Vielfaches von w schreiben, also gibt es ein $\kappa \in K$ mit $x - \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i u_i = \kappa w$. Dies heißt aber $x = \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i u_i + \kappa w$.

Es muß jetzt noch untersucht werden, daß im Falle m=n U=V gilt.
Lt. Voraussetzung wissen wir aber schon, daß dann U/W=V/W.

Sei also $x \in V$. Dann ist $\overline{x} \in V/W \subset U/W$. Nun ist $U/W = \{ \overline{u} \mid u \in U \}$, d.h. $\overline{x} = \overline{u}$ für ein $u \in U$, also $x - u \in W$ für ein $u \in U$, also $x = u + \kappa w$ für ein $u \in U$ und ein $\kappa \in K$. Weil aber $w \in U$, ist auch $x \in U$. Ingesamt also: $x \in V \Rightarrow x \in U$, d.h. $V \subset U$ und damit U=V .