Grundlagen der Aussagenlogik

Aussagen im Sinne der Aussagenlogik sind Sätze, die wahr oder falsch sind.

Im folgenden seien *A,B,C ..., P,Q,R, ...* beliebige Aussagen.
Die Wahrheitswerte wahr/falsch kürzen wir ab durch *w/f* .
Ist $w(A)$ der Wahrheitswert der Aussage A , so ist entweder $w(A)=w$ oder $w(A)=f$.
Durch Benutzung von Indizes verfügen wir, falls nötig, über beliebig viele „Aussagenvariable“, z.B. $A_1, A_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots$.

In der Aussagenlogik interessieren nicht Sinn oder Bedeutung von Aussagen, sondern ausschließlich ihr Wahrheitswert. Daher ist die Russelsche Aussage „Der Mond besteht aus grünem Käse“ durchaus legitim; sie besitzt allerdings den Wahrheitswert „falsch“.

Auch eine unbewiesene Aussage wie z.B. die Goldbachsche Vermutung: „Jede gerade natürliche Zahl läßt sich als Summe von zwei Primzahlen darstellen“ ist wahr oder falsch. Natürlich sollten beweisbare Aussagen immer wahr sein. Ein tiefliegender Satz von Gödel besagt sogar, daß es wahre Aussagen gibt, die nicht beweisbar sind. Solche Aussagen lassen sich sogar explizit konstruieren[1].

Aussagenlogische Verknüpfungen
In der Aussagenlogik verknüpft man bestehende Aussagen zu neuen Aussagen.
Z.B. bildet man aus zwei Aussagen *A,B* die neue Aussage „*A* und *B*“ , abgekürzt $A \wedge B$.
Der Wahrheitwert dieser Aussagenverknüpfung wird definiert durch folgende Tabelle:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Aussage $A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind und genau dann falsch, wenn mindestens eine der Teilaussagen falsch ist.

Weiterhin definiert man die Aussage „*A* oder *B*“, abgekürzt $A \vee B$, durch die „Wahrheitstabelle“

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Aussage $A \vee B$ ist also genau dann falsch, wenn beide beteiligten Teilaussagen falsch sind und genau dann wahr, wenn mindestens eine davon wahr ist.

Wichtig ist auch die Negation einer Aussage, also die Aussage „Nicht *A*“, abgekürzt $\neg A$. Dazu gehört die Wahrheitstafel

A	$\neg A$
w	f
f	w

1 Siehe z.B. „A Course in Mathematical Logic“ von Y. Manin.

Schließlich benutzen wir noch die Verknüpfungen „Wenn *A*, dann *B*“ und „*A* genau dann wenn *B*“, abgekürzt durch $A \to B$ und $A \leftrightarrow B$. Sie werden definiert durch die Wahrheitstafeln

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$A \to B$ ist also genau dann falsch, wenn *A* wahr und *B* falsch ist.
$A \leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn *A* und *B* beide wahr oder *A* und *B* beide falsch sind, wenn *A* und *B* also denselben Wahrheitswert besitzen.

Obige Verknüpfungen definiert man nicht nur für Aussagen, sondern auch für die Wahrheitswerte selbst und hat demnach z.B. $w \wedge f = f$, $f \vee w = w$, $w \to f = f$, $f \leftrightarrow f = w$, $\neg f = w$.
Manchmal bezeichnet man mit w, f auch einfach eine wahre oder eine falsche Aussage und nicht nur einen Wahrheitswert. Aus dem jeweiligen Kontext muß dann hervorgehen, was gemeint ist.

Alternative Sprechweisen:
Statt „Wenn *A*, dann *B*“ sagt man auch „Aus *A* folgt *B*“, oder „*B* folgt aus *A* , oder „*A* impliziert *B*“, oder „*B* wird von *A* impliziert“.
Statt „*A* genau dann wenn *B*“ sagt man auch „*A* und *B* sind äquivalent“.
A und *B* sind also genau dann äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitswert besitzen.

Wenn man weiß, daß die Aussagen *A* und $A \to B$ wahr sind, dann ist auch *B* wahr.
Diese klassische Schlußweise heißt „Modus Ponens“.

Die Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$ und auch die zugehörigen Zeichen nennt man „logische Konjunktionen“.

Aussagenlogische Formeln
Wir haben oben *A,B,C ..., P,Q,R, ...* als Aussagen interpretiert.
Im Folgenden möchten wir diese Zeichen auch als „Aussagenvariable“ verwenden. Wenn wir in diesem Sinne eine Formel wie $((A \wedge B) \vee C)$ hinschreiben, erhalten wir daraus erst dadurch eine Aussage, daß wir für die Variablen *A*,*B*,*C* konkrete Aussagen einsetzen.

Man könnte den Unterschied zwischen Aussagen und Aussagenvariablen verdeutlichen, indem man systematisch letztere kursive Zeichen und für erstere nicht-kursive Zeichen verwendet. Dies wird aber irgendwann lästig und ist auch nicht üblich. Aus dem Kontext sollte jeweils erkennbar sein, ob von Aussagen oder Aussagenvariablen die Rede ist.

Aussagenlogische Formeln werden nach den beiden folgenden Regeln aufgebaut:
1. Jede Aussagenvariable stellt eine eine aussagenlogische Formel dar, außerdem die wahre Aussage *w* und die falsche Aussage *f* .
2. Sind X und Y aussagenlogische Formeln, so sind $(\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y})$, $(\mathrm{X} \vee \mathrm{Y})$, $(\mathrm{X} \to \mathrm{Y})$, $(\mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{Y})$, $(\neg \mathrm{X})$ aussagenlogische Formeln[2].

2 Man beachte, daß demnach $(A \wedge B)$ eine korrekt geformte aussagenlogische Formel ist, $A \wedge B$ ohne Klammern aber streng genommen nicht. Man könnte jetzt „Klammerersparungsregeln“ formulieren: wir ersparen es uns hier.

Zu jeder aussagenlogischen Formel gehört eine Wahrheitstabelle, die man mit Hilfe der Wahrheitstabellen für die logischen Konjunktionen konstruieren kann. Beispiel $((A \wedge B) \vee C)$:

A	B	C	$(A \wedge B)$	$((A \wedge B) \vee C)$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
f	w	f	f	f
f	f	w	f	w
f	f	f	f	f

Letztlich sollte die Tabelle nur die Spalten für A,B,C und für das Ergebnis $((A \wedge B) \vee C)$ enthalten. Für die Herleitung und Nachvollziehbarkeit erweist es sich aber als praktisch, die Zwischenergebnisse ebenfalls zu notieren.

Eine aussagenlogische Formel heißt **Tautologie**, wenn in der letzten Spalte der Wahrheitstabelle nur der Wahrheitswert *w* auftaucht.

Man prüfe nun nach, daß folgende Formeln Tautologien sind:
1. $(A \vee (\neg A))$
2. $(\neg(A \wedge (\neg A)))$
3. $(A \rightarrow A)$
4. $(A \leftrightarrow A)$
5. $((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A))$
6. $((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A))$
7. $(((A \vee B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)))$
8. $(A \rightarrow (A \vee B))$
9. $((A \wedge B) \rightarrow A)$
10. $((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$
11. $(((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$
12. $((A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B)$
13. $((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B))$
14. $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)))$
15. $(A \leftrightarrow (\neg(\neg A)))$
16. $f \rightarrow A$, $A \rightarrow w$
17. $(((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
18. $((A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B)$

Setzt man also beliebige Aussagen für die Aussagenvariablen in einer Tautologie ein, so entsteht immer eine wahre Aussage. In diesem Sinne stellen Tautologien „logisch wahre“ Aussagen dar.

Interessant sind Tautologien der Form (X $\leftrightarrow$ Y).
Dann besitzen nämlich die logischen Formeln X und Y dieselbe Wahrheitstabelle.
Es gilt auch die Umkehrung: Besitzen die logischen Formeln X und Y dieselbe Wahrheitstabelle, so ist die Formel (X $\leftrightarrow$ Y) eine Tautologie.

Interpretieren wir einige Tautologien der obigen Liste:

1. $(A \vee (\neg A))$ heißt gerade: eine beliebige Aussage ist wahr oder sie ist falsch.
2. $(\neg(A \wedge (\neg A)))$ bedeutet, daß eine beliebige Aussage nicht wahr und falsch sein kann.
3. $(A \to A)$ bedeutet: Jede Aussage impliziert sich selbst.
4. $(A \leftrightarrow A)$ bedeutet: Jede Aussage ist äquivalent zu sich selbst.
6. $((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A))$ heißt: für beliebige Aussagen A,B haben $A \wedge B$ und $B \wedge A$ denselben Wahrheitswert. Die und-Verknüpfung ist also in diesem Sinn kommutativ.
7. $(((A \vee B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C)))$: für beliebige Aussagen A,B,C haben $(A \vee B) \wedge C$ und $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ denselben Wahrheitswert. Dies läßt sich als Distributivgesetz für die und- und die oder-Verknüpfung auffassen.
10. $((A \to B) \leftrightarrow ((\neg B) \to (\neg A)))$: diese Figur heißt „Kontraposition“. Sie bedeutet, daß man, statt zu zeigen, daß B aus A folgt, genauso gut zeigen kann, daß $\neg A$ aus $\neg B$ folgt, und umgekehrt.
13. $((A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B))$. $(A \to B)$ ist also äquivalent zu $((\neg A) \vee B)$. Man kann daher die Konjunktion $\to$ ausdrücken mittels $\neg$ und $\vee$.
15. $(A \leftrightarrow (\neg(\neg A)))$: eine doppelte Verneinung ist äquivalent zur ursprünglichen Aussage.
16. $f \to A$, $A \to w$: aus einer falschen Aussage folgt jede beliebige Aussage, und aus einer beliebigen Aussage folgt jede wahre Aussage.

Aus 14. u. 15. ergibt sich $((A \wedge B) \leftrightarrow (\neg((\neg A) \vee (\neg B))))$. Man kann also die Konjunktion $\wedge$ ausdrücken durch die Konjunktionen $\neg$ und $\vee$.

17. $(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C))$ bedeutet die Transitivität der Folgerungsbeziehung.
18. $((A \wedge (A \to B)) \to B)$ ist gerade der Modus Ponens.

Man kann viel über „Bedeutung“ solcher Formeln philosophieren.
Mittels der zugehörigen Wahrheitstabelle festzustellen, ob es sich bei einer Formel um eine Tautologie handelt, ist aber eine rein mechanische Tätigkeit.