Lineare Algebra 1, WS09/10
M. Hortmann

Blatt 11

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Tutor**	
1a	b	2a	b	3	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	6=120%	

1. Sei $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

a) Bringen Sie mittels elementarer Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen die Matrix A auf die „Gaußsche Normalform“ $\begin{pmatrix} E & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und benutzen Sie diese zur Berechnung einer Basis des Kerns der durch A gegebenen linearen Abbildung $\mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$.
(Vergessen Sie nicht, die vorgenommenen Spaltenvertauschungen zu berücksichtigen.)

b) Sei zusätzlich $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^3$. Bringen Sie die „erweiterte Matrix“ $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ auf die Normalform $\left(\begin{array}{cc|c} E & C & \tilde{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, und lesen Sie daraus eine Lösung der inhomogenen Gleichung $Ax=b$ ab.
(Vergessen Sie nicht, die vorgenommenen Spaltenvertauschungen zu berücksichtigen.)

2. Sei $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$. Finden Sie det($A$)

a) durch explizite Berechnung der Summe $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} a_{4,\sigma(4)}$,

b) indem Sie A durch Zeilen- und Spaltenoperationen, welche die Determinante unverändert lassen, auf obere Dreiecksgestalt bringen.

3. Betrachten Sie $A \in M_3(\mathbb{Q})$, wobei $\forall i, j \in \mathbb{N}: 1 \leqslant i, j \leqslant 3 \Rightarrow a_{ij} \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant a_{ij} \leqslant 9$.
Außerdem sollen die Matrixeinträge alle verschieden sein, also jede Zahl zwischen 1 und 9 genau einmal vorkommen.

Wie groß kann det(A) maximal sein? (Beweis!)

4. Für $i, j \in \mathbb{N}$ sei $a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i=1 \text{ oder } j=1 \\ a_{i,j-1} + a_{i-1,j} & \text{sonst} \end{cases}$ rekursiv definiert.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $A_k := (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \in M_k(\mathbb{R})$.

Man finde den Wert von $\det(A_{10})$. (Beweis!)

Hinweis: Man überlege sich die Sache zunächst für kleinere Werte von k.