Lineare Algebra 1, WS09/10
M. Hortmann

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen				**Tutor**	
1	2	3	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	4	

1. Berechnen Sie mittels des in der Vorlesung präsentierten Algorithmus den Rang der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Begründen Sie, warum A invertierbar ist, wenn rg(A)=n.

3. Seien A,B zwei Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper K, für die das Matrizenprodukt AB definiert ist. Rechnen Sie explizit nach, daß $(AB)^t = B^t A^t$.

4. Seien V,W Vektorräume über K, $v_1, \ldots, v_n$ sei Basis von V, $w_1, \ldots, w_m$ sei Basis von W. Die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ werde bezüglich dieser Basen durch die Matrix A dargestellt.

Sei jetzt $v'_1, \ldots, v'_n$ eine weitere Basis von V, $w'_1, \ldots, w'_m$ eine weitere Basis von W.
Dann gibt es eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ mit $(v'_1, \ldots, v'_n) = (v_1, \ldots, v_n) B$ [1] und eine Matrix $C \in M_{m\times m}(K)$ mit $(w'_1, \ldots, w'_m) = (w_1, \ldots, w_m) C$. (B,C nennt man Basiswechselmatrizen.)

Die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ werde bezüglich der Basen $v'_1, \ldots, v'_n$ und $w'_1, \ldots, w'_m$ durch die Matrix A' dargestellt.

Man finde und beweise eine Formel, die A' durch A, B, C ausdrückt.

---

1 Soll heißen $v'_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} v_k$.

5. Freiwillige Sonderaufgabe

Gegeben sei eine lineare Abbildung $V \xrightarrow{\varphi} W$ zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Damit ist auch die duale Abbildung $W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$ definiert.

Man zeige, nach Möglichkeit unter Benutzung von Kenntnissen über exakte Sequenzen, daß $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \operatorname{Im} \varphi^*$.

Bemerkung: Wenn man bedenkt, daß bei gegebenen Basen auf V, W und den zugehörigen dualen Basen auf V^*, W^* die duale Abbildung φ^* durch die transponierte Matrix A^t der zu φ gehörigen Matrix A beschrieben wird, heißt dies, daß die Anzahl linear unabhängiger Spalten in A^t gleich der Anzahl linear unabhängiger Spalten in A ist. Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen in A ist demnach gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spalten in A. Also $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^t)$, Zeilenrang=Spaltenrang.