Lineare Algebra 1, WS09/10
M. Hortmann

Blatt 8

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Tutor**	
1	2	3	4ab	4c	4d	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	6	

Alle Körper in den folgenden Aufgaben sind kommutativ, d.h. ihre Multiplikation ist kommutativ.

Aufgabe 1

$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$. Man berechne nach dem in der Vorlesung präsentierten Algorithmus die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 2

Ist $A \in M_n(K)$, so definiert man die „Spur von A" durch $\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Die Spur ist also die Summe der Hauptdiagonalelemente. Man rechne nach, daß für beliebige Matrizen $A, B \in M_n(K)$ gilt: $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$. Ist $X \in M_n(K)$ invertierbar, so zeige man $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(X^{-1}AX)$.

Aufgabe 3

Sei V ein K-Vektorraum.
$U, W \subset V$ seien Unterräume. $u_1, \ldots, u_n$ sei Basis von U, $w_1, \ldots, w_m$ sei Basis von W. Man zeige: $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m$ sind Basis von V genau dann, wenn dann, wenn $U \cap W = \{0\}$ und $U+W=V$.

Aufgabe 4

$\mathbb{R}$ ist in natürlicher Weise ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ [1].

Die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft, daß $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$. Es ist $\alpha \approx -0.6823278$. Man kann zeigen, daß $\alpha \notin \mathbb{Q}$, und daß die reellen Zahlen $1, \alpha, \alpha^2$ im Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind, so daß der von $1, \alpha, \alpha^2$ erzeugte Teilraum $U \subset \mathbb{R}$ ein 3-dimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum ist.

Man zeige:

a) $\alpha^3, \alpha^4 \in U$

b) Mit $x, y \in U$ ist auch $x \cdot y \in U$.

c) Ist $0 \neq x \in U$, so ist die Abbildung $U \to U$, $y \mapsto xy$ ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraumhomomorphismus.

d) Man finde die Matrixdarstellung dieses Homomorphismus bezüglich der Basis $1, \alpha, \alpha^2$ und konstruiere das Inverse dieser Matrix.

---

1 $\mathbb{R}$ ist ja eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition. Die skalare Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ erfolgt einfach als das Produkt $\lambda \cdot x$ der reellen Zahlen λ und x.