Lineare Algebra 1, WS09/10
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								**Tutor**	
1a	b	c	d	2a	b	3a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	8	

Alle Körper in den folgenden Aufgaben seien kommutativ, d.h. ihre Multiplikation sei kommutativ.

Aufgabe 1

a) Man gebe ein Beispiel für Matrizen $A, B \in M_{2\times 2}(K)$ mit $AB \neq BA$.

b) Man gebe ein Beispiel für Matrizen $A, B \in M_{2\times 2}(K)$ mit $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B$ und $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Bestimmen Sie die Elemente der folgenden Menge:
$Z = \{ A \in M_{2\times 2}(K) \mid \forall B \in M_{2\times 2}(K): \ AB = BA \}$ [1].

d) Zeigen Sie, daß für beliebige $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times k}, C \in M_{k\times r}$ gilt: $(AB)C = A(BC)$ [2].

Aufgabe 2

a) Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Offenbar bildet M eine Gruppe bezüglich der Matrixaddition mit der Nullmatrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ als neutralem Element. Zeigen Sie, daß $M^* := M \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine kommutative Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation bildet.

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathbb{C}^* \to M^* \quad z \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix}$ ein Gruppenisomorphismus ist.

---

1 Beispielsweise ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z$.

2 Zwei Matrizen sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten gleich sein.

c) freiwillige Sonderaufgabe

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$. Offenbar bildet M eine Gruppe bezüglich der Matrixaddition mit der Nullmatrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ als neutralem Element. Zeigen Sie, daß $M^* := M \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine nicht-kommutative Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation bildet.

Sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Offenbar bildet N eine Gruppe bezüglich der Matrixaddition mit der Nullmatrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ als neutralem Element. Zeigen Sie, daß $N^* := N \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine nicht- kommutative Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation bildet.

Finden Sie einen Gruppenisomorphismus zwischen M^* und $N*$

Aufgabe 3

a) Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3, a, b \in V$, wobei v_1, v_2, v_3 linear unabhängig seien und v_1, v_2, a, b eine Basis von V.
Zeigen Sie, daß dann v_1, v_2, v_3, a oder v_1, v_2, v_3, b eine Basis von V bildet.

b) Sei v_1, v_2 eine Basis von V; seien $a, b, c \in V$ drei beliebige Vektoren. Begründen Sie, warum a, b, c linear abhängig sein müssen.