Lineare Algebra 1, WS09/10
M. Hortmann

Blatt 6

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Tutor**	
1a	2a	2b	3ab	3cd	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	6	

Aufgabe 1
a) Seien G_1 , G_2 Gruppen, $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ Normalteiler. Die „kanonischen Projektionen“ $\pi_1 : G_1 \to G_1/H_1$ und $\pi_2 : G_2 \to G_2/H_2$ seien gegeben durch $\pi_1(x) = x H_1$ und $\pi_2(y) = y H_2$.
Außerdem sei $\varphi : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(H_1) \subset H_2$.

Man zeige:
Es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi} : G_1/H_1 \to G_2/H_2$, für den gilt: $\overline{\varphi} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$.

Bemerkung: Man sagt, das Diagramm $\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ G_1/H_1 & \xrightarrow[\overline{\varphi}]{} & G_2/H_2 \end{array}$ kommutiert, wenn $\overline{\varphi} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$.
Damit läßt sich die zu beweisende Aussage umformulieren zu: Man zeige, daß es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi} : G_1/H_1 \to G_2/H_2$ gibt, so daß obiges Diagramm kommutiert.

b) Freiwillige Sonderaufgabe:
Angeregt durch eine Frage im Plenum:
Man betrachte die additiv geschriebenen Gruppen $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, \ldots, 6\}$ und $\mathbb{Z}_{35} = \{0, 1, \ldots, 34\}$, wobei die Gruppenoperation jeweils die Addition modulo 7 bzw. modulo 35 ist.

Man zeige durch direktes Nachrechnen (dies ist doch nicht so umständlich, wie es zunächst schien), daß die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}_{35} \to \mathbb{Z}_7$, gegeben durch $k \mapsto k\%7$ ein Gruppenepimorphismus ist.

Zusatz: Können Sie die Tatsache, daß $\varphi : \mathbb{Z}_{35} \to \mathbb{Z}_7$ ein Gruppenhomomorphismus ist, direkt auf 1a) zurückführen?

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie $(1+2\mathrm{i})^{-1}$, d.h. führen Sie diese komplexe Zahl in die Form $a+bi$ über.

b) Sei $z=a+bi\in\mathbb{C}$. Berechnen Sie eine komplexe Zahl $w=c+di$, so daß $w^2=z$, d.h. drücken Sie c, d mit Hilfe von a, b aus.

Der Vektor $z=(\sqrt{3}+i)\in\mathbb{C}$ bildet mit der reellen Achse einen Winkel von 30°. (Freiwillige Zusatzaufgabe: Wieso?) Daher sollte eine komplexe Zahl w, die wie z im ersten Quadranten liegt, und für die $w^2=z$ gilt, mit der x-Achse einen Winkel von 15° bilden. Berechnen Sie w!

Aufgabe 3

Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper; 0 sei wie üblich das neutrale Element der Addition, 1 das neutrale Element der Multiplikation. Zum Beweis der folgenden Aussagen sollen Sie ausschließlich die Körperaxiome[1] benutzen, also keine darüber hinausgehenden Aussagen.

a) Zeigen Sie: Sind $a,b\in K$ und ist $a\cdot b=0$, so ist a=0 oder b=0.
b) Zeigen Sie: Ist $c\in K, c\neq 0$, so gilt: $\forall\, a,b\in K:\ ac=bc\Rightarrow a=b$.
c) Zeigen Sie $\forall\, x\in K:\ -x=(-1)\cdot x$ (d.h. das additiv Inverse von x ist gleich dem additiv Inversen von 1, multipliziert mit x.)
d) Zeigen Sie: $\forall\, x\in K:\ x\cdot 0=0\cdot x=0$

Aufgabe 4

Man betrachte die folgenden Elemente des Vektorraums $\mathbb{Z}_7^3$: $\begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ und finde heraus, ob sie linear unabhängig oder linear abhängig sind.

1Körperaxiome: a) (K,+) ist abelsche Gruppe, b) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist Gruppe, c) Distributivgesetze