**Lineare Algebra 1, WS09/10**
**M. Hortmann**

# Blatt 3

| **Namen** | | | | | | **Gruppe** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| 1 | 2a | 2b | 3a | 3b | 4 | **Summe** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| | | | | | | |

**Aufgabe 1**
Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Für $A \subset X$ sei $\overline{A} := X \setminus A$ und für $B := f(A) \subset Y$ sei $\overline{B} := Y \setminus B$.

Man beweise – oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels – die Aussagen
$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ bzw. $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

**Aufgabe 2**
Sei $f: X \to Y$ eine injektive Abbildung. Man zeige:
a) Es gibt eine surjektive Abbildung $g: Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
b) Ist $f$ nicht surjektiv, so kann $g$ nicht injektiv sein.

Freiwillige Sonderaufgabe: Formulieren Sie zu a) und b) analoge Aussagen, wenn $f$ surjektiv ist und versuchen Sie einen Beweis.

**Aufgabe 3**
Sei $f: M \to N$ eine Abbildung.
Man erinnere sich an die Definition von Urbildmengen: Ist $V \subset N$, so setzt man
$f^{-1}(V) := \{x \in M \mid f(x) \in V\}$. Durch $V \to f^{-1}(V)$ ist dann eine Abbildung $\mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$ definiert, die wir hier $\Phi$ nennen. Man zeige:

a) $f$ ist genau dann injektiv, wenn $\Phi$ surjektiv ist.
b) $f$ ist genau dann surjektiv, wenn $\Phi$ injektiv ist.

Sei $G$ eine Gruppe mit neutralem Element $e$.
$H \subset G$ heißt Untergruppe, wenn $e \in H$ und $\forall\, x, y \in H : xy \in H$ und $\forall\, x \in H : \; x^{-1} \in H$.
Man überlegt leicht, daß $H$ genau dann Untergruppe von $G$ ist, wenn gilt: $\forall\, x, y \in H : \; y^{-1} x \in H$.

**Aufgabe 4**

Ist $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ so gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{N}_0$, $r < b$ mit $a = qb + r$ (Division mit Rest.)
Man setze nun, wie in vielen Programmiersprachen, $a \,\%\, b := r$.

Man betrachte anschließend die 12-elementige Menge $G := \{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$ mit der Verknüpfung $x * y := (xy)\%21$, d.h. man multipliziert zunächst mit der üblichen Multiplikation in den natürlichen Zahlen und nimmt dann den Rest, der sich bei der Division des Ergebnisses durch 21 ergibt. Mit dieser Verknüpfung wird $G$ zu einer Gruppe.

Geben Sie Untergruppen von $G$ an mit 2,3,4 und 6 Elementen.