Ein Beispiel für nicht-gleichmäßige Konvergenz

Sei $I :=]0,1[$. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch $f_n(x) = x^n$ gegebene Funktion $f_n : I \to \mathbb{R}$. Bekanntlich gilt für jedes $x \in I$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Nimmt man also als $f : I \to \mathbb{R}$ die Null-Funktion, so hat man $\forall x \in I : \; f_n(x) \to f(x)$, mit anderen Worten: die Funktionenfolge (f_n) konvergiert im Intervall I punktweise gegen die Funktion f, also

(1) $\forall \epsilon > 0 \, \forall x \in I \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geqslant n_0 : \; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Wäre die Konvergenz gleichmäßig, so könnte man n_0 unabhängig von $x \in I$ wählen, d.h.

(2) $\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geqslant n_0 \, \forall x \in I : \; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Die Konvergenz ist aber in diesem Falle nicht gleichmäßig, d.h. wir werden zeigen, daß die Verneinung von (2) gilt:

(3) $\exists \epsilon > 0 \, \forall n_0 \in \mathbb{N} \, \exists n \geqslant n_0 \, \exists x \in I : \; |f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon$

Dazu wähle man $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Gibt man jetzt $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig vor, so wähle man $n = n_0$ und ein $x \in I$ mit $x \geqslant 1 - \frac{1}{2 n_0}$. Aus letzterer Ungleichung ergibt sich $1 - x \leqslant \frac{1}{2n}$ und daraus wieder $n(1-x) \leqslant \frac{1}{2}$ und daraus $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leqslant 1 - n(1-x)$. Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich (3)

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n = (1-(1-x))^n \overset{\text{(Bernoullische Ungleichung)}}{\geqslant} 1 - n(1-x) \geqslant \frac{1}{2}$$

was zu zeigen war.

Die Bedingung an x , nämlich $x \geqslant 1 - \frac{1}{2 n_0}$ hat man sich gerade so hingebogen, daß diese letzte Abschätzung mit der Bernoullischen Ungleichung möglich wird. Die Anwendung der Bernoullischen Ungleichung ist der Kern des Beweises.

Es sollte aber auch anschaulich klar sein, daß keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt, sonst ließen sich die Graphen der f_n ab einem gewissen Index in jeden " ϵ - Schlauch" um die Nullfunktion einschließen, was ja offenbar nicht der Fall ist.

Oben wurde formal gezeigt, daß sie sich nicht in den " $\frac{1}{2}$ - Schlauch" einschließen lassen.