Quotientenraum

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subset V$ ein Unterraum.
Zu $x \in V$ definiert man die Nebenklasse $\overline{x} := x + U := \{x + u \mid u \in U\}$ und den Quotientenraum $V/U := \{\overline{x} \mid x \in V\}$ („V modulo U") als Menge aller Nebenklassen.

(Die Konstruktion sollte aus der Gruppentheorie bekannt sein, s. Aufgabenblätter 2,4.)

Es ist $y \in \overline{x}$ genau dann wenn $\overline{y} = \overline{x}$ genau dann wenn $y - x \in U$, wie man sofort nachrechnet.
Man nennt x auch „Repräsentanten" der Nebenklasse $\overline{x}$. Offenbar ist jedes Element der Nebenklasse $\overline{x}$ auch Repräsentant von $\overline{x}$

V/U wird selbst in natürlicher Weise ein Vektorraum über K.
Dazu muß die Vektoraddition und die Multiplikation mit Skalaren erklärt werden.

Zur Addition zweier Nebenklassen nimmt man zwei Repräsentanten, addiert diese und nimmt als Ergebnis die zu dieser Summe gehörige Nebenklasse, also:
$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$

Bei einer derartigen Definition muß man aber zeigen, daß das Ergebnis sich nicht ändert, wenn man andere Repräsentanten gewählt hätte, muß also zeigen:

$$\overline{x} = \overline{z} \quad \wedge \quad \overline{y} = \overline{w} \quad \rightarrow \quad \overline{x + y} = \overline{z + w}$$

Ist also $\overline{x} = \overline{z} \quad \wedge \quad \overline{y} = \overline{w}$, so folgt $z - x \in U$ und $w - y \in U$, daher
$U \ni (z - x) + (w - y) = (z + w) - (x + y)$, und somit $\overline{x + y} = \overline{z + w}$, was zu beweisen war.

Man sagt, die Definition der Addition ist „unabhängig von den Repräsentanten" und spricht auch von „Wohldefiniertheit".

Die Multiplikation mit Skalaren erfolgt analog: Man multipliziert eine Nebenklasse mit einem Skalar, indem man dies für einen Repräsentanten tut, als Ergebnis die zugehörige Nebenklasse nimmt und dann wieder die Unabhängigkeit vom gewählten Repräsentanten zeigt:

$$\lambda \overline{x} := \overline{\lambda x}$$
$$\overline{x} = \overline{y} \quad \rightarrow \quad y - x \in U \quad \rightarrow \quad U \ni \lambda (y - x) = \lambda y - \lambda x \quad \rightarrow \quad \overline{\lambda x} = \overline{\lambda y} \quad .$$

Man zeigt leicht, daß mit diesen Operationen V/U ein Vektorraum über K ist. Das Nullelement dieses Vektorraums ist gerade die Nebenklasse, die $0 \in V$ enthält und daher gleich $\overline{0}$ bzw. gleich U.

Die Abbildung

$\pi : V \rightarrow V/U$, $x \rightarrow \overline{x}$ ist ein Vektorraumhomomorphismus, d.h. es gilt
$\forall x, y \in V, \lambda \in K: \ \pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y), \ \pi(\lambda x) = \lambda \pi(x)$.

π heißt auch „natürliche Projektion" von V auf V/U, und ist surjektiv.
Es ist $\ker \pi := \{x \in U \mid \pi(x) = 0\} = U$. Jeder Unterraum eines Vektorraums kommt also als Kern eines Vektorraumhomomorphismus vor.

Beispiel:
1. $V = \mathbb{R}^3$ und U eine Gerade durch den Nullpunkt. Die Nebenklassen sind alle Geraden im $\mathbb{R}^3$, die parallel dazu sind. Man sieht in diesem Beispiel sofort, daß verschiedene Nebenklassen disjunkt sind, d.h. leeren Durchschnitt besitzen, und daß sie den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ ausfüllen. Bei der Nebenklassenaddition wählt man also zwei Geraden, auf ihnen je einen Punkt, addiert diese Punkte und nimmt als Ergebnis die Gerade durch diesen letzteren Punkt. Analog multipliziert man eine Nebenklasse, also eine der Geraden, mit einem Skalar, indem man einen Punkt der Geraden wählt, diesen mit dem Skalar multipliziert und als Ergebnis wieder die gerade durch den so erhaltenen Punkt nimmt.

2. $V = \mathbb{R}^3$, U eine Ebene durch den Nullpunkt. Diesmal sind die Nebenklassen gerade die zu dieser Ebene parallelen Ebenen. Wieder sieht man sofort, daß verschiedene solche Ebenen disjunkt sind und daß sie den ganzen Raum füllen. Die Addition von Nebenklassen und die Multiplikation mit Skalaren erfolgt nach demselben Schema wie oben.

Kehren wir zurück zur allgemeinen Situation:

Ist $S \subset V$ ein Erzeugendensystem, so ist $\overline{S} := \{\overline{s} | s \in S\}$ ein Erzeugendensystem in V/U.

Ist nämlich $\overline{x} \in V/U$, so ist der Repräsentant $x \in V$ eine endliche Linearkombination von Elementen in S, man hat also eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, $s_1, \ldots, s_n \in S$.

Jetzt hat man $\overline{x} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i s_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{s_i}$, d.h. $\overline{x}$ ist eine endliche Linearkombination von Elementen von $\overline{S}$.

Zu einer Teilmenge von $T \subset V/U$ gibt es offenbar eine Teilmenge $S \subset V$ mit $\overline{S} = T$, d.h. jede Teilmenge von V/U hat die Form $\overline{S}$. Zur obigen Aussage über Erzeugendensysteme gibt es wie üblich eine „duale Aussage" über linear unabhängige Mengen:

Ist $\overline{S} \subset V/U$ linear unabhängig, so ist auch $S \subset V$ linear unabhängig.

Sei also $\overline{S} \subset V/U$ linear unabhängig und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = 0$ eine beliebige Linearkombination von Elementen von S, welche den Nullvektor in V ergibt. Gezeigt werden muß, daß $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.
Es ist $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \rightarrow \overline{0} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{s_i}$, d.h. eine endliche Linearkombination von Elementen von $\overline{S}$ ist gleich dem Nullelement von V/U. Die lineare Unabhängigkeit von $\overline{S}$ bedeutet nun, daß alle Linearkoeffizienten verschwinden müssen, was zu zeigen war.

Basis des Quotientenraums

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von U, so sind die $\overline{v_{k+1}}, \ldots \overline{v_n}$ eine Basis von V/U.

Ist nämlich $\overline{x} \in V/U$, so gibt es eine Darstellung des Repräsentanten $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, also

$\overline{x}=\overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i}=\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i v_i}=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{v_i}=\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i$, denn für $1 \leqslant i \leqslant k$ ist ja $v_i \in U$ und damit $\overline{v_i}=\overline{0}$.
Also sind die $\overline{v_{k+1}}, \ldots \overline{v_n}$ ein Erzeugendensystem von V/U .

Ist andererseits $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \overline{v_i}=\overline{0}$, so bedeutet dies $\overline{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i}=\overline{0}$, was gleichbedeutend ist mit $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \in U$. Da ein Element von U aber eine eindeutige Darstellung als Linearkombination nur der $v_1, \ldots v_k$ haben muß, müssen sämtliche $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ Null sein, und damit ist die lineare Unabhängigkeit der $\overline{v_{k+1}}, \ldots \overline{v_n}$ gezeigt.

Gleichzeitig haben wir für endlichdimensionales V die Formel $\dim U + \dim V/U = \dim V$ gezeigt.

Homomorphismen auf dem Quotienten

Sei $U \subset V$ ein Unterraum und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit $U \subset \ker \varphi$.
Dann erhält man durch $\overline{\varphi}(\overline{x}) := \overline{\varphi(x)}$ eine lineare Abbildung $\overline{\varphi} : V/U \rightarrow W$.

Dazu ist zunächst die Wohldefiniertheit dieser Abbildung zu zeigen, d.h. es ist zu zeigen:
$\overline{x}=\overline{y} \rightarrow \varphi(x)=\varphi(y)$.
Ist aber $\overline{x}=\overline{y}$, so ist dies gleichbedeutend mit $x-y \in U$, also $x=y+u$ für ein $u \in U$.
Es folgt also $\varphi(x)=\varphi(y+u)=\varphi(y)+\varphi(u)=\varphi(y)$, denn $\varphi(u)=0$ wegen $U \subset \ker \varphi$.

$\overline{\varphi}$ ist offenbar die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die das Diagramm

$$\begin{array}{lcl} V & \overset{\varphi}{\rightarrow} & W \\ \downarrow \pi & & \downarrow id \quad \text{kommutiert.} \\ V/U & \overset{\overline{\varphi}}{\rightarrow} & W \end{array}$$

Umgekehrt zeigt man leicht, daß aus der Existenz einer Abbildung $\overline{\varphi}$, die dieses Diagramm kommutativ macht, die Beziehung $U \subset \ker \varphi$ folgt.