# Aussagen und Bemerkungen zur Mengenlehre

**M. Hortmann**

Gibt es überhaupt Mengen?

Genauso könnte man fragen: Gibt es überhaupt Zahlen?

Bei den Zahlen haben wir uns angewöhnt, mit ihnen zu umzugehen, ohne ihre Existenz weiter zu problematisieren. Dabei gehen wir aus von gewissen elementaren Eigenschaften – den sogenannten Axiomen – und versuchen, weitere komplexere Eigenschaften und Operationen aus diesen logisch abzuleiten.

**Naïve Mengenlehre**

Bei vielen mathematischen Gegenständen gibt es "naive" Definitionen, z.B. sagt Euklid: "Ein Punkt ist, was keinen Teil hat". Cantor definierte: "Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter und wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen; diese Objekte heißen Elemente der Menge."

Man schreibt $a \in M$, um auszudrücken, daß das Objekt *a* Element der Menge *M* ist. Häufig benutzt man kleine Buchstaben zur Bezeichnung der Objekte und große zur Bezeichnung der Mengen, deren Elemente die gegebenen Objekte sind. Es erweist sich aber als sinnvoll, nicht zwischen "Objekten" und "Mengen" zu unterscheiden, d.h. die Objekte, mit denen wir es in der Mathematik zu tun haben, lassen sich immer selbst als Mengen auffassen, und es kommt dann eben häufig vor, daß eine Menge ein Element einer anderen Menge ist.

Die Cantorsche Definition führt zum sogenannten **Extensionalitätaxiom:**
Zwei Mengen *M,N* sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
Formal kann man das so ausdrücken: $(M = N) \Leftrightarrow (\forall x : (x \in M \leftrightarrow x \in N))$ .

Man definiert den Begriff der Teilmenge:
Eine Menge *M* ist Teilmenge einer Menge *N* , wenn jedes Element von *M* auch Element von *N* ist.
Man schreibt dann: $M \subset N$ oder auch $N \supset M$ und nennt M auch Untermenge von *N* und *N* Obermenge von *M*

Aus dem Extensionalitätsaxiom folgt sofort: $(M = N) \Leftrightarrow (M \subset N \wedge N \subset M)$ , d.h.
zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn die eine Teilmenge der anderen ist, und umgekehrt.

Ist $A(x)$ eine Aussageform[1], also ein Ausdruck, der zu einer wahren oder falschen Aussage wird, wenn man für die Variable *x* eine Menge einsetzt. Ist $A(M)$ wahr, so sagt man: "*A* trifft auf *M* zu." Im neunzehnten Jahrhundert glaubte man, in jedem Fall die Menge derjenigen Mengen bilden zu können, auf die eine gegebene Aussageform zutrifft. Für diese Menge benutzt man die Notation $\{x \mid A(x)\}$ . Russell zeigte 1903, daß auf diese Weise nicht immer eine sinnvolle Menge gebildet werden kann und löste so die (fruchtbare) Grundlagenkrise der Mathematik aus:

**Die Russellsche Antinomie**

Wenn es nämlich erlaubt ist, z.B. die Menge $R := \{x \mid x \notin x\}$ [2] zu bilden, dann muß ja entweder $R \in R$ oder $R \notin R$ gelten. Nun enthält *R* als Elemente genau diejenigen Mengen, die sich nicht als Element enthalten. Gilt nun $R \in R$ , enthält sich also *R* selbst als Element, so ist *R* demnach

---

1 Man kann syntaktisch genau präzisieren, was eine Aussageform ist. Wir erlauben uns, hier etwas informell zu bleiben, um nicht zu weit abzuschweifen.

2 Die Aussageform $A(x)$ ist hier also konkret gleich $x \notin x$ .

gerade nicht Element der Menge der Mengen, die sich nicht als Element enthalten, es folgt also $R \notin R$. Ist andererseits $R \notin R$, so ist $R$ eine Menge, die sich nicht als Element enthält, sollte also Element der Menge der Mengen sein, die sich nicht als Element enthalten, so daß also $R \in R$. Damit haben wir einen Widerspruch!

**Das moderne Mengenbildungs-Axiom**
Dieser Widerspruch läßt sich auflösen, wenn "wilde" Mengenbildungen wie die obige nicht erlaubt werden. Man darf im Allgemenen nur solche Mengen bilden, deren Elemente bereits als Elemente einer vorher gegebenen Menge bekannt sind:

Ist $M$ eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform, so gibt es die Menge $M_A := \{x \mid x \in M \wedge A(x)\}$. Man schreibt auch $M_A = \{x \in M \mid A(x)\}$.

Die Russellsche Menge $R$ läßt sich jetzt nicht mehr definieren!

Es werden weitere Axiome benötigt, um übliche Mengenkonstruktionen durchführen zu können, die durch das moderne **Mengenbildungs**-Axiom allein nicht erlaubt sind.

**Axiom: Existenz einer Menge**
Die Existenz mindestens einer Menge muß axiomatisch gefordert werden.

**Die leere Menge**
Es gibt eine eindeutig bestimmte Menge, deren Elementezahl 0 ist! Ihre Existenz und Eindeutigkeit können wir jetzt beweisen:
Ist nämlich $M$ eine Menge, die es ja nach dem Existenzaxiom geben muß, so können wir mit Hilfe des modernen Mengenbildungsaxioms die Menge $\emptyset_M := \{x \in M \mid x \neq x\}$ als Teilmenge von $M$ bilden. $\emptyset_M$ enthält offenbar kein Element. Ist auch $L$ eine Menge, welche kein Element enthält, so zeigen wir, daß $\emptyset_M \subset L$ und $L \subset \emptyset_M$. Dazu muß für jedes $x$ gelten: $x \in \emptyset_M \leftrightarrow x \in L$. Da die Aussagen auf beiden Seiten von $\leftrightarrow$ jedenfalls falsch sind, ist die logische Äquivalenzbeziehung wahr. Also ist nach dem Extensionalitätsaxiom $L = \emptyset_M$. Es gibt also nur eine Menge ohne Elemente, und sie erhält die Bezeichnung $\emptyset$.

Letztlich lassen sich alle für die Mathematik relevanten Mengen aus der leeren Menge konstruieren.

**Durchschnitt und Vereinigung**
Sind Mengen $M$ und $N$ gegeben, so möchten wir die Vereinigungsmenge $M \cup N := \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$ bilden. Dies wäre durch das moderne Mengenbildungsaxiom nur gedeckt, wenn bereits beide Mengen Teilmenge einer gemeinsamen Obermenge sind, wovon man zunächst nicht ausgehen kann; wir müssen die Existenz der Vereinigung axiomatisch fordern. Hat man die Vereinigung, dann ist sie natürlich eine solche gemeinsame Obermenge!

Dagegen ist die Durchschnittsbildung $M \cap N := \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}$ durch das moderne Mengenbildungsaxiom gerechtfertigt, denn wir konstruieren ja nur eine Teilmenge einer bereits gegebenen Menge.

Eine allgemeinere Art von Vereinigungsbildung besteht darin, daß man die Elemente aller Elemente von M betrachtet und zu einer Menge zusammenfaßt, die die Bezeichnung $\cup M$ erhält. Es ist also $\cup M = \{x \mid \exists y \in M:\ x \in y\}$, und die Existenz von $\cup M$ muß axiomatisch gefordert werden.

In ähnlicher Weise definiert man für eine nicht leere Menge *M* den Durchschnitt all ihrer Elemente $\cap M := \{x \mid \forall y \in M : x \in y\}$ als Menge derjenigen Objekte, die in allen Elementen von M als Elemente enthalten sind. Da $M \neq \emptyset$, gibt es ein Element $A \in M$, und man sieht, daß $\cap M := \{x \in A \mid \forall y \in M : x \in y\} \subset A$, so daß diese Konstruktion bereits durch das moderne Mengenbildungsaxiom erlaubt ist.

**Mengenalgebra**
Für Durchschnitt und Vereinigung gelten quasi algebraische Regeln.

Sind *M,N,K* Mengen, so gilt

$M \cup N = N \cup M,\ M \cap N = N \cap M$ Kommutativgesetze
$M \cup (N \cup K) = (M \cup N) \cup K,\ M \cap (N \cap K) = (M \cap N) \cap K$ Assoziativgesetze
$M \cup (N \cap K) = (M \cup N) \cap (M \cup K),\ M \cap (N \cup K) = (M \cap N) \cup (M \cap K)$ Distributivgesetze

Gilt $M, N \subset K$, so setzen wir $\overline{M} := K - M := \{x \in K \mid x \notin M\}$, $\overline{N}$ analog, und haben die sogenannten de Morganschen Regeln $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}, \overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

Man sieht, die “Dualität” von Durchschnitt und Vereinigung. Man kann in jeder der obigen Formeln Durchschnitt durch Vereinigung und umgekehrt ersetzen.

**Axiom: Potenzmenge**
Eine weitere wichtige Mengenkonstruktion, deren Möglichkeit man axiomatisch fordern muß, ist die der Potenzmenge einer Menge *M*, d.h. der Menge aller ihrer Teilmengen. Man bezeichnet sie mit $\wp(M)$, und es ist also $\wp(M) = \{K \mid K \subset N\}$.

**Einermenge**
Ist *M* eine Menge, so sollt es auch möglich sein die “Einermenge” $\{M\} := \{x \mid x = M\}$ zu bilden, die nur ein einziges Element, nämlich M, besitzt. Die Existenz von $\{M\}$ ist nicht durch das moderne Mengenbildungsaxiom gedeckt! Wir können sie trotzdem konstruieren:
Es gilt $M \subset M$, also $M \in \wp(M)$. Wenn es die Menge $\{M\}$ gäbe, also die Menge, deren einziges Element *M* ist, hätte man $\{M\} \subset \wp(M)$.
Das moderne Mengenbildungsaxiom erlaubt die Bildung der Menge $\{x \in \wp(M) \mid x = M\}$ und man sieht sofort, daß das einzige Element dieser so gebildeten Menge *M* ist und ist dann frei, ihr den Namen $\{M\}$ zu geben. Die Existenz von $\{M\}$ muß man also nicht axiomatisch fordern.

Ist *N* eine weitere Menge, so setzt man $\{M, N\} = \{M\} \cup \{N\}$, usw. bei drei und mehr Mengen.

Man sieht jetzt übrigens auch leicht, daß $\cup \{M, N\} = M \cup N$ !