Summen von Vektorräumen

Man geht zunächst aus von einem *K*-Vektorraum *V* und Unterräumen $U, W \subset V$ und setzt
$$U+W := \{u+w \mid u \in U, w \in W\} .$$
$U+W$ ist ein Unterraum von V, wie man sofort feststellt.

Nur wenn $U \cap W = \{0\}$, ist die Darstellung eines Elements $u+w \in U+W$ eindeutig; man spricht dann von einer *direkten Summe* und benutzt die Schreibweise $U \oplus W$. Ist die Summe direkt und sind $u_1, \dots, u_k$ Basis von U $w_1, \dots, w_l$ Basis von W, so ist $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l$ Basis von $U \oplus W$, so daß $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$. *U,W* sind selbst wieder Unterräume von $U \oplus W$.

Die durch $u+w \to u$ und $u+w \to w$ gegebenen *natürlichen Projektionen* $U \oplus W \xrightarrow{\pi_U} U$, $U \oplus W \xrightarrow{\pi_W} W$ sind linear, und man hat kurze exakte Sequenzen $0 \to U \xrightarrow{\iota_U} U \oplus W \xrightarrow{\pi_W} W \to 0$ und $0 \to W \xrightarrow{\iota_U} U \oplus W \xrightarrow{\pi_U} U \to 0$. Dabei ist $\iota_U : U \to U \oplus W$ die durch $x \to x = x+0$ gegebene *Einbettung* von *U* in $U \oplus W$; entsprechendes für $\iota_W : W \to U \oplus W$.

Ist $U \oplus W = V$ so sagt man, *W* sei ein zu *U komplementärer Unterraum* (und umgekehrt), und spricht von einer *direkten Zerlegung* des Raumes V. Zu einem Unterraum $U \subset V$ kann man immer einen komplementären Unterraum finden, indem man z.B. von einer Basis $v_1, \dots, v_k$ von *U* ausgeht, diese zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ von *V* ergänzt und $W = < v_{k+1}, \dots, v_n >$ wählt. Ein zu *U* komplementärer Unterraum ist nicht eindeutig bestimmt. Ist z.B. $V = K^2$ und $U = < e_1 >$, so sind sowohl $< e_2 >$ wie $< e_1 + e_2 >$ zu U komplementär.

Sind *U,W* komplementär, so ist $W \to V/U$, $w \to \overline{w}$ ein Isomorphismus.
Beweis: Die Abbildung ist natürlich linear. Sie ist surjektiv, denn für jedes $\overline{x} \in V/U$ hat man $x = u+w$, also $\overline{x} = \overline{u+w} = \overline{u} + \overline{w} = \overline{0} + \overline{w} = \overline{w}$, und sie ist injektiv, denn aus $\overline{w} = \overline{0}$ folgt $w \in U$ und wegen $U \cap W = \{0\}$ folgt $w = 0$, d.h. ihr Kern ist $\{0\}$.

Ist *Z* ein weiterer *K*-Vektorraum und hat man lineare Abbildungen $\varphi : U \to Z$, $\psi : W \to Z$, so ist durch $(u+w) \to \varphi(u) + \psi(w)$ eine lineare Abbildung $U \oplus W \to Z$ gegeben.
Ist andererseits $\varphi : Z \to U$, $\psi : Z \to W$, so erhält man durch $z \to \varphi(z) + \psi(z)$ eine lineare Abbildung $Z \to U \oplus W$. Im Folgenden die zugehörigen Matrixdarstellungen:

Ist $u_1, \dots, u_k$ Basis von U, $w_1, \dots, w_l$ Basis von W, $z_1, \dots z_m$ Basis von Z, hat $\varphi : U \to Z$ diesbezüglich die Matrixdarstellung $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}$, $\psi : W \to Z$ die Matrixdarstellung $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix}$, so hat die durch $(u+w) \to \varphi(u) + \psi(w)$ gegebene Abbildung $U \oplus W \to Z$ die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & b_{m1} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix}$, wenn man auf $U \oplus W$ die Basis $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l$ wählt. Diese Matrix stellt man am besten in Blockform dar: $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$.

Geht man wieder andererseits von $\varphi : Z \to U$ und $\psi : Z \to W$ aus, so hat die zu φ gehörige Matrix die Form $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix}$, die zu ψ gehörige Matrix die Form $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}$ und die zur durch $z \to \varphi(z) + \psi(z)$ gegebenen Abbildung $Z \to U \oplus W$ die Form $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}$, was in Blockform offenbar gerade $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ ist.

(Direkte) Summen von mehreren Vektorräumen

Analoge Bezeichnungen und Überlegungen ergeben sich, wenn man nicht nur von 2 sondern von drei oder noch mehr Unterräumen von *V* ausgeht. Die Direktheitsbedingung lautet, daß Mengen, deren Elemente aus verschiedenen Unterräumen stammen, linear unabhängig sind. Bei zwei Unterräumen ist das äquivalent zur Forderung, daß sie sich nur im Nullraum schneiden.

Wir entwickeln noch einmal alle Begriffe für eine beliebige Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Unterräumen eines Vektorraums V, ohne auf Endlichdimensionalität eines dieser Räume Rücksicht zu nehmen.

Man definiert die Summe der Räume $(U_i)_{i \in I}$ als $\sum_{i \in I} U_i := < \bigcup_{i \in I} U_i >$, und dies ist ein Teilraum von *V*. Man erinnere sich, daß für eine beliebige Teilmenge $S \subset V$ der von *S* aufgespannte Teilraum <*S*> von *V* definiert ist durch $< S > := \left\{ \sum_{s \in J} \lambda_s s \,\middle|\, J \subset I \text{ endlich}, \forall s \in J : \lambda_s \in K \right\}$, mit anderen Worten: der von *S* aufgespannte Teilraum von *V* ist die Menge der endlichen Linearkombinationen von Elementen von S.

Der Raum $\sum_{i \in I} U_i$ besteht aus endlichen Summen von Elementen irgendwelcher der U_i.

Die Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilräumen von *V* heißt *direkt*, wenn jede Familie $(x_i)_{i \in J}$ von Null verschiedener Vektoren $x_i \in U_i$ linear unabhängig ist[1]. Ist diese Bedingung erfüllt, so schreibt man $\bigoplus_{i \in I} U_i$ statt $\sum_{i \in I} U_i$. Jedes $x \in \bigoplus_{i \in I} U_i$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i \in I}{}' x_i$ [2].

1 d.h. Ist $J \subset I$ endlich und ist $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$, so sind sämtliche $\lambda_i = 0$.

2 $x = \sum_{i \in I}{}' x_i$ bedeutet: nur endlich viele Summanden sind ungleich Null.

Ist z.B. $V=K[X]$ der Vektorraum der Polynome über K und für $n\in\mathbb{N}^0$ [3] $U_n:=\{aX^n \mid a\in K\}$, d.h. U_n besteht aus den Monomen n-ten Grades[4], so haben wir $K[X]=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^0} U_n$. Man schreibt stattdessen auch $K[X]=\bigoplus_{n=0}^{\infty} U_n$.

Ist die Indexmenge 2-elementig, also z.B. $I=\{1,2\}$, so mache man sich klar, daß $U_1\oplus U_2=\bigoplus_{i\in I} U_i$.

Ist $I=\{1,\dots,n\}$, so schreibt man $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ statt $\bigoplus_{i\in I} U_i$.

Ist B die Basis eines Vektorraums V und hat man eine Zerlegung $B=\bigcup_{i\in I} B_i$ mit paarweise disjunkten Teilmengen und definiert U_i als denjenigen Teilraum von V, welcher die Basis B_i hat, also $U_i:=\langle B_i\rangle$, so ist $V=\bigoplus_{i\in I} U_i$.

Hat man umgekehrt eine Darstellung $V=\bigoplus_{i\in I} U_i$ und Basen $B_i\subset U_i$, so ist $B:=\bigcup_{i\in I} B_i$ eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen und eine Basis von V.

Bei den obigen Summenbildungen gingen wir immer von Unterräumen eines bereits gegebenen Vektorraums V aus. Oft ist ein solcher gar nicht a priori gegeben. Es läßt sich aber zu gegebenen Vektorräumen immer im folgenden Sinne die sogenanne "äußere" direkte Summe bilden:

Sind z.B. U,W Vektorräume über K, so bildet man den Raum $V:=U\times W$ und identifiziert U mit dem Unterraum $U\times\{0\}$ von V und entsprechend W mit dem Unterraum $\{0\}\times W$. Offenbar ist $U\times W=(U\times\{0\})\oplus(\{0\}\times W)$, und wir haben $V=U\oplus W$.

Entsprechend gehen wir bei Familien von Vektorräumen vor. Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektorräumen, die diesmal nicht a priori als Unterräume eines gegebenen Vektorraums gegeben seien, so bildet man zunächst den Produktraum $\bigtimes_{i\in I} U_i:=\left\{f:I\to\bigcup_{i\in I} U_i \;\middle|\; f(i)\in U_i\right\}$. Die K-Vektorraumstruktur auf diesem Raum ist einfach erklärt durch $(f+g)(i):=f(i)+g(i)$ und $(\lambda f)(i):=\lambda(f(i))$. In diesem großen Produktraum sondern wir den Unterraum derjenigen Funktionen aus, deren Werte für alle bis auf endlich viele Argumente 0 sind, d.h. man setzt $V:=\left\{f\in\bigtimes_{i\in I} U_i \;\middle|\; \{i\in I \mid f(i)\neq 0\} \text{ ist endlich}\right\}$. In diesem Raum identifizieren wir den Unterraum $\left\{f\in\bigtimes_{i\in I} U_i \;\middle|\; f(i)=0 \text{ für } i\neq i_0\right\}$ mit dem vorgegebenen Raum U_{i_0}. Man rechnet leicht nach, daß jetzt gilt $V=\bigoplus_{i\in I} U_i$.

---

3 $\mathbb{N}^0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$

4 Man erinnere sich, daß das Nullpolynom nicht den Grad 0 besitzt. Die ist hier aber nicht relevant.

Die direkte Summe besitzt folgende *universelle Eigenschaft*:

Die natürlichen Einbettungen $j_i : U_i \to \bigoplus_{i\in I} U_i$ sind linear. Ist Z ein weiterer K-Vektorraum und sind für jedes $i \in I$ lineare Abbildungen $f_i : U_i \to Z$ gegeben, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \bigoplus_{i\in I} U_i \to Z$ mit $\forall i \in I:\ f_i = f \circ j_i$, d.h. das Diagramm $\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{f_i} & Z \\ \downarrow \mathrm{id} & & \uparrow f \\ U_i & \xrightarrow{j_i} & \bigoplus_{i\in I} U_i \end{array}$ kommutiert für alle $i \in I$.

Die vorher durchgeführten Konstruktionen dienten eigentlich nur dazu zu zeigen, daß es zu gegebenen U_i unter geeigneten Bedingungen ein solches Objekt gibt. Alle Eigenschaften der direkten Summe lassen sich aus der universellen Eigenschaft folgern.

Z.B. folgt sofort, daß die natürlichen Einbettungen injektiv sind.
Zum Beweis fixiere man ein $i_0 \in I$, setze $Z = U_{i_0}$ und $f_i := \begin{cases} \mathrm{id} & \text{falls} \quad i = i_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Wegen $\forall i \in I:\ f_i = f \circ j_i$ folgt insbesondere $\mathrm{id} = f \circ j_{i_0}$. Nun ist sicher id injektiv, während $f \circ j_{i_0}$ nicht injektiv sein kann, wenn es j_{i_0} nicht ist.

Es folgt auch, daß die direkte Summe "bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt" ist.
Gibt es nämlich zu der Familie $(U_i)_{i\in I}$ 2 Konstruktionen für die direkte Summe, nennen wir sie Z, W, jeweils mit den Einbettungen $j_i : U_i \to Z$, $k_i : U_i \to W$ so hat man aufgrund der für beide geltenen universellen Eigenschaft kommutative Diagramme
$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{k_i} & W \\ \downarrow \mathrm{id} & & \uparrow f \\ U_i & \xrightarrow{j_i} & Z \end{array}$, $\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{j_i} & Z \\ \downarrow \mathrm{id} & & \uparrow g \\ U_i & \xrightarrow{k_i} & W \end{array}$ mit eindeutig bestimmten linearen Abbildungen f, g . Da auch
$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{k_i} & W \\ \downarrow \mathrm{id} & & \uparrow f\circ g \\ U_i & \xrightarrow{k_i} & W \end{array}$ und $\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{k_i} & W \\ \downarrow \mathrm{id} & & \uparrow \mathrm{id} \\ U_i & \xrightarrow{k_i} & W \end{array}$ kommutativ sind, gilt wegen der Eindeutigkeitsforderung der universellen Eigenschaft $\mathrm{id} = f \circ g$. Da analog auch $\mathrm{id} = g \circ f$, muß z.B. f bijektiv, also ein Isomorphismus sein.

Dies ist ein typisches "kategorielles Argument".
Man beschafft sich auf irgendeine mehr oder weniger elegante Weise die direkte Summe und argumentiert anschließend nur noch mit ihrer universellen Eigenschaft, ohne sich um etwaige Häßlichkeiten der Konstruktion weiter zu kümmern.