Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 11

Aufgabe 1

Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und $c = a + b$. Man betrachte das „euklidische Skalarprodukt“ $< a, b > = a_1 b_1 + a_2 b_2$ und die dadurch gegebene „Euklidische Länge“ $\|a\| = \sqrt{< a, a >}$ und rechne nach, daß

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = \|c\|^2 \text{ genau dann, wenn } < a, b > = 0$$

Aufgabe 2

Man betrachte die 2x2-Matrix mit reellen Koeffizienten $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_1, a_2)$. Es gelte $\|a_1\| = \|a_2\| = 1$ und $< a_1, a_2 > = 0$.

a) Man bilde $b_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$ und $b_1 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ und zeige, daß auch $\|b_1\| = \|b_2\| = 1$ und $< b_1, b_2 > = 0$.
b) Man zeige: det A = 1 oder det A = -1
c) Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$. Man zeige $< Ac_1, Ac_2 > = < c_1, c_2 >$
d) Freiwillige Sonderaufgabe: Versuchen Sie, eine Matrix B zu finden, so daß $B^2 = A$. Dabei dürfen Quadratwurzeln, aber keine transzendenten Funktionen wie Exponentialfunktion, Logarithmus, Sinus oder Kosinus benutzt werden.

Aufgabe 3

Man finde eine Basis des $\mathbb{R}^4$ von paarweise aufeinander senkrecht stehenden Vektoren, deren einer der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 4

Zu einer Matrix $A \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ sei $A^* := \overline{A^t} \in M_n(\mathbb{C})$, d.h. man bilde zunächst die Transponierte und konjugiere dann alle Koeffizienten. Man zeigt leicht, daß für Matrizenprodukte gilt:
$(AB)^* = B^* A^*$.

Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt *unitär*, wenn $A^* A = E$.
$B \in M_n(\mathbb{C})$ heißt antihermitsch, wenn $B^* = -B$.

Die antihermitischen *nxn*-Matrizen bilden in natürlicher Weise einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, den wir mit AH_n bezeichnen. (Warum ist dies kein VR über $\mathbb{C}$?) Weiter sei AH_n^0 der Untervektorraum von AH_n derjenigen Matrizen *B*, für die zusätzlich noch Sp(*B*)[1] = 0 gilt.

a) Sei jetzt $A \in M_n(\mathbb{C})$ unitär und $B \in \mathrm{AH}_n^0$.
Zeigen Sie, daß auch $A\,B\,A^* \in \mathrm{AH}_n^0$. (Ist relativ trivial und dient nur der Vorbereitung von b))
(Die Abbildung $\mathrm{AH}_n^0 \xrightarrow{\Phi} \mathrm{AH}_n^0,\ B \to ABA^*$ ist $\mathbb{R}$-linear .)

b) Gegeben seien komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Man bilde die Matrix
$A = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß *A* unitär ist. Zeigen Sie weiterhin, daß die Matrizen
$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von AH_2^0 bilden und berechnen Sie die Matrixdarstellung *R* von Φ zu dieser Basis.

Freiwillige Sonderaufgabe: *R* ist also eine reelle 3x3-Matrix. Rechnen Sie nach, daß $R^t R = E$, d.h.: *R* ist orthogonal.

---

1 Die *Spur* einer *nxn*-Matrix *B* ist definiert als Summe der Hauptdiagonalelemente, also $\mathrm{Sp}\, B = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$.
Man rechnet leicht nach, daß $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$