Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 10

Aufgabe 1
Man benutzt oft die Notation $|M|$ für die Elementeanzahl einer Menge M. Ist M nicht endlich, so schreibt man $|M|=\infty$, ohne an dieser Stelle verschiedene Mächtigkeiten unendlicher Mengen zu unterscheiden.

Zeigen Sie durch Induktion über n :
Ist $|M|=n$ und $0\leqslant m\leqslant n$ so gibt es $\binom{n}{m}$ m-elementige Teilmengen von M.
(Beim Beweis kommen die Ihnen bekannten Rekursionsformeln für die Binomialkoeffizienten zur Anwendung.)

Aufgabe 2
a) Benutzen Sie die Formel $\det A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_5}\epsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4}a_{\sigma(5)5}$ zur Berechnung der

Determinante der Matrix $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\3&1&2&0&0\\0&4&1&3&0\\0&0&1&2&3\\0&0&0&2&4\end{pmatrix}\in M_5(\mathbb{Z}_5)$.

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, für welche relativ wenigen $\sigma\in\mathfrak{S}_5$ das Produkt in obiger Formel ungleich Null ist und schreiben Sie von vornherein nur diese Summanden hin.

b) Elementare Zeilentransformationen des Typs "Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen" und analoge Spaltentransformationen ändern die Determinate einer Matrix nicht. Außerdem ist die Determinante einer Matrix, deren Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonale sämtlich Null sind, gleich dem Produkt der Koeffizienten in der Hauptdiagonalen.
Bringen Sie die Matrix aus a) durch elementare Transformationen in diese "obere Dreiecksgestalt" und berechnen Sie det A als Produkt von deren Hauptdiagonalelementen.

Aufgabe 3
Die Matrix A_{ij} entstehe aus der Matrix A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Ist also A eine quadratische Matrix mit n Zeilen und Spalten, so besitzen die A_{ij} n-1 Zeilen und Spalten.
Es gilt für jedes i, $1\leqslant i\leqslant n$: $\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ (Entwicklung nach der i-ten Zeile)
und für jedes j, $1\leqslant j\leqslant n$: $\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte)

Berechnen Sie die Determinate der Matrix $A=\begin{pmatrix}3&1&0&1\\1&3&4&0\\4&1&1&1\\0&2&2&1\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{Z}_5)$ einmal durch

Entwicklung nach der 2. Spalte und einmal durch Entwicklung nach der 3. Zeile.

Aufgabe 4

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{k-mal}} \to K$ heißt *k-Multilinearform*, wenn sie linear in jeder Komponente ist[1]. Sie heißt *alternierend*, wenn sie bei Vertauschung zweier Argumente das Vorzeichen wechselt. Die Menge der alternierenden k-Multilinearformen bildet in natürlicher Weise selbst einen K-Vektorraum. Die Resultate der folgenden Aufgabenteile bedeuten, daß der Vektorraum der n-Multilinearformen auf einem n-dimensionalen Vektorraum eindimensional ist, ähnlich wie auch $\dim \Lambda^n V = 1$:

a) Sei V n-dimensional mit Basis $v_1, \ldots, v_n$. Zeigen Sie: Es gibt eine alternierende n-multilineare Abbildung $\varphi: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{n-mal}} \to K$ mit $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

b) Seien $\varphi, \psi: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{n-mal}} \to K$ alternierende n-multilineare Abbildungen. Zeigen Sie:

Wenn $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \psi(v_1, \ldots, v_n)$, dann $\varphi = \psi$.

---

1 Wenn also $\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v+w, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n) + \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ und $\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \lambda \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$