Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 8

Aufgabe 1

Seien V,W Vektorräume über K, $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, $w_1, \ldots w_m$ eine Basis von W. $\mathcal{B}(V \times W, K)$ sei der Vektorraum der K-bilinearen Abbildungen $V \times W \to K$. Für $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ setze man $\varphi_{ij}(v_k, w_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} = \begin{cases} 1 \text{ für } i=k \text{ und } j=l \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$. Man zeige, daß die φ_{ij} eine Basis von $\mathcal{B}(V \times W, K)$ bilden, so daß dieser Raum mn-dimensional ist.

Aufgabe 2

Die *Charakteristik* eines Körpers K, ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}=0$.
Gibt es keine solche Zahl, so setzt man $\operatorname{char} K = 0$. Es ist z.B. $\operatorname{char} \mathbb{Z}_2 = 2$, $\operatorname{char} \mathbb{Z}_5 = 5$, $\operatorname{char} \mathbb{R} = 0$.

a) Zeigen Sie: Die Charakteristik eines Körpers ist entweder 0 oder eine Primzahl.

Eine bilineare Abbildung $\varphi: V \times V \to K$ nennt man auch *Bilinearform auf* V.
Eine solche Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn $\forall x, y \in V: \ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Die Menge $\mathcal{S}(V)$ der symmetrischen Bilinearformen bildet offenbar einen Unterraum des Raums aller Bilinearformen $\mathcal{B}(V \times V, K)$.

Sei im Weiteren $\operatorname{char} K \neq 2$.
Man nennt man eine Bilinearform $\varphi: V \times V \to K$ *antisymmetrisch*, wenn $\forall x, y \in V: \ \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$. Offenbar braucht man die Bedingung $\operatorname{char} K \neq 2$, um antisymmetrische von symmetrischen Formen zu unterscheiden. Die Menge $\mathcal{A}(V)$ der antisymmetrischen Bilinearformen bildet ebenfalls einen Unterraum von $\mathcal{B}(V \times V, K)$.

Machen Sie sich Folgendes klar:
Ist φ eine Bilinearform auf V so wird durch $(x, y) \to \frac{1}{2}\big(\varphi(x, y) + \varphi(y, x)\big)$ eine Abbildung $\mathcal{S}: \ \mathcal{B}(V \times V, K) \to \mathcal{B}(V \times V, K)$ definiert. Man sieht sofort, daß $\operatorname{Im} \mathcal{S} = \mathcal{S}(V)$ und $\ker \mathcal{S} = \mathcal{A}(V)$. Analog wird durch $(x, y) \to \frac{1}{2}\big(\varphi(x, y) - \varphi(y, x)\big)$ eine Abbildung $\mathcal{A}: \ \mathcal{B}(V \times V, K) \to \mathcal{B}(V \times V, K)$ definiert mit $\ker \mathcal{A} = \mathcal{S}(V)$ und $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$. Beide AbbildungenD $\mathcal{S}, \mathcal{A}$ sind Projektionen .

Diese Informationen lassen sich zusammen mit der Aussage von Aufgabe 1 bei der Lösung der folgenden Teilfaufgaben einsetzen:

b) Sei wieder $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Finden Sie eine Basis und damit die Dimension von $\mathcal{S}(V)$.

c) Dieselbe Aufgabe für $\mathcal{A}(V)$.

(Experimentieren Sie ggf. erst mit den Fällen $V = K^2, K^3$)

d) **freiwillige Zusatzaufgabe:** Erläutern Sie, was die Fragestellungen in b), c) mit quadratischen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen zu tun haben, also mit Matrizen A , für die gilt $A^t = A$, bzw. $A^t = -A$.

e) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(V)$. Zeigen Sie $\forall x, y \in V: \ \varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y)\right)$

Eine Abbildung $Q: V \to K$ heißt quadratische Form, wenn $\forall \lambda \in K, x \in V: \ Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$.
Eine Abbildung $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ bestimmt offenbar eine quadratische Form, indem man $Q(x) := \varphi(x, x)$ setzt.

f) Zeigen Sie: Ist $Q: V \to K$ eine quadratische Form, so wird durch $\varphi(x, y) := \frac{1}{4}\left(Q(x+y) - Q(x-y)\right)$ eine symmetrische Bilinearform definiert.

Es sind also die quadratischen Formen bereits durch die symmetrischen Bilinearformen bestimmt, wenn der zu Grunde liegende Körper eine von 2 verschiedene Charakteristik besitzt.

freiwillige Zusatzaufgabe
Stellen Sie eine Zusatzüberlegung an, wie man die quadratischen Formen $Q: V \to K$ klassifizieren könnte, wenn $\operatorname{char} K = 2$.