Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 7

Aufgabe 1

Sei V ein K-Vektorraum, $U, W \subset V$ seien Teilräume, und es gelte $U+W=V$. Dann ist die durch $\Phi(u,w)=u+w$ gegebene Abbildung $U \times W \xrightarrow{\Phi} V$ linear. Man zeige: $\ker\Phi=\{(x,-x) | x \in U \cap W\}$. Wieso ist Φ ein Isomorphismus, wenn $U \oplus W=V$, d.h. wenn es sich um eine direkte Summe handelt?

Aufgabe 2

Sind V, W K-Vektorräume, $x \in V, \lambda \in K$ und $\varphi, \psi : V \to W$, so setzt man $(\varphi+\psi)(x):=\varphi(x)+\psi(x)$ und $(\lambda\varphi)(x):=\lambda(\varphi(x))$. Man definiert $\mathscr{L}_K(V,W)$ als Menge der K-linearen Abbildungen $V \to W$, und mit den eben definierten Operationen wird $\mathscr{L}_K(V,W)$ selbst ein Vektorraum.

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so kann man eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ dadurch definieren, daß man die Werte $\varphi(v_i) \in W$ willkürlich vorgibt und anschließend für $x=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ $\varphi(x):=\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(v_i)$ definiert . (Man nennt das "linear fortsetzen".)

Ist jetzt auch noch eine Basis $w_1, \ldots w_m$ von W gegeben, so setze man für $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant m$ $\varphi_{ij}(v_k):=\delta_{jk} w_i$, wobei

$$\delta_{jk}:=\begin{cases} 1 & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man zeige: Die so definierten linearen Abbildungen $\varphi_{ij} : V \to W$, $1 \leqslant i \leqslant m$ $1 \leqslant j \leqslant n$ bilden eine Basis von $\mathscr{L}_K(V,W)$. (Machen Sie sich dazu auch klar, wie die zu $\varphi_{ij} : V \to W$ gehörige Matrix aussieht.)

Aufgabe 3

Sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\pi : V \to V$ heißt *Projektion*, wenn $\pi \circ \pi=\pi$.
a) Zeigen Sie: Ist π eine Projektion, so ist $\ker\pi \oplus \operatorname{Im}\pi=V$.
Eine lineare Abbildung $\iota : V \to V$ heißt *Involution*, wenn $\iota \circ \iota=\mathrm{id}$.
b) Der Körper K habe die Eigenschaft: $1+1 \neq 0$. Man setze $2:=1+1 \in K$. Man zeige, daß zu jeder Projektion $\pi : V \to V$ durch $2\pi-\mathrm{id}$ eine Involution gegeben ist, und daß jede Involution in V in dieser Weise geschrieben werden kann.

Aufgabe 4

Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume, $v_1, \dots, v_n$, $v_1', \dots, v_n'$ seien Basen von V, $w_1, \dots, w_m$, $w_1', \dots w_m'$ seien Basen von W. Man kann die Elemente der Basis $v_1', \dots, v_n'$ eindeutig als Linearkombinationen der Elemente der Basis $v_1, \dots, v_n$ darstellen, also $v_j' = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i$. Man setze $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Entsprechend sei $w_l' = \sum_{k=1}^{m} y_{kl} w_k$ und $Y = (y_{kl})_{1 \leq k, l \leq m}$.

Ist darüberhinaus $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A = (a_{ki})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$ bezüglich der Basen $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_m$, so hat die Matrixdarstellung $A' = (a_{ki}')_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$ bezüglich der "gestrichenen" Basen die Form $A' = YAX^{-1}$.

Wenn Sie wollen, beweisen Sie diese Formel; wenn nicht, überprüfen Sie sie für die durch $x \to Ax$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung $K^3 \to K^2$, $K = \mathbb{Z}_5$, wobei die "ungestrichenen" Basen die kanonischen Basen von K^3, K^2 seien und $v_1' = (1,2,3)\sim, v_2' = (2,3,4)\sim, v_3' = (1,2,1)\sim$, $w_1' = (1,2)\sim, w_2' = (3,4)\sim$.