Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 5

Aufgabe 1
Sei V ein Vektorraum über der Körper K, $U, W \subset V$ seien Unterräume.
a) Zeigen Sie: Ist $U \cup W$ ein Unterraum von V, so gilt $U \subset W$ oder $W \subset U$.

Ist $S \subset V$, so nennt man $<S> := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in K,\ s_1, \ldots, s_n \in S \right\}$ den von S erzeugten Unterraum von V. Man setzt $U + W := < U \cup W >$ und offenbar gilt
$U + W = \{ u + w | u \in U, w \in W \}$.

b) Sei $x = u + w \in U + W$. Man zeige, daß u, w genau dann eindeutig bestimmt sind, wenn $U \cap W = \{0\}$.

Aufgabe 2
Sind die Vektoren $v_1 = (1,1,2,4)\sim$, $v_2 = (2,1,-5,2)\sim$, $v_3 = (1,-1,-4,0)\sim$, $v_1 = (2,1,1,6)\sim$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^4$? ("~", soll andeuten, daß es sich um Spaltenvektoren handelt.)

Aufgabe 3
Wir hatten auf $\mathbb{R}^2$ die komplexe Multiplikation erklärt durch $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$.
Sei jetzt $y \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Die Abbildung $\varphi_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $x \to xy$ ist linear.

a) Wie sieht die zu φ_y zur kanonischen Basis e_1, e_2 gehörige Matrix A_y aus?
b) e_1 ist offenbar neutrales Element der obigen Multiplikation.
Man finde zu $y \neq 0$ das inverse Element und zeige $A_{yz} = A_y A_z$ und $A_{y^{-1}} = A_y^{-1}$

Man betrachte analog $\mathbb{R}^4$ mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_4$. Man definiert eine Multiplikation[1] auf $\mathbb{R}^4$, indem man e_1 als neutrales Element nimmt, $e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = -e_1$, $e_2 \cdot e_3 = e_4$ setzt und ansonsten Assoziativ- und Distributivgesetze annimmt, und auch $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^4 : x \cdot (\lambda y) = (\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$.

c) Leiten Sie aus den eben gegebenen Regeln eine Formel für das Produkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ ab.

Man sieht, daß diese Multiplikation keineswegs kommutativ ist.

Sonderaufgabe
Lösen Sie die zu 3a) 3b) analogen Aufgaben.

1 Dies ist die *Quaternionenmultiplikation*