Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 4

Zunächst einiges Material und Aufgaben, worin die in Blatt 2 begonnene Diskussion über "Quotientenstrukturen", die auch in der Theorie der Vektorräume wichtig sind, fortgesetzt wird:

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe, $U \subset G$ eine Untergruppe.
Ist $x \in G$, so nennt man $xU := \{xy \mid y \in U\}$ "Linksnebenklasse von x bezüglich U" und entsprechend $Ux := \{yx \mid y \in U\}$ "Rechtsnebenklasse".

Wenn $\forall x \in G:\ xU = Ux$, dann heißt die Untergruppe U "Normalteiler von G".

Eine Untergruppe ist also genau dann Normalteiler, wenn jede Linksnebenklasse auch Rechtsneben-klasse ist. Man schreibt auch gern $\overline{x}$ für die Nebenklassen und hat bei einem Normalteiler $\overline{x} = xU = Ux$. Offenbar ist in kommutativen Gruppen jede Untergruppe Normalteiler.

Aufgabe 1
a) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $U := \ker \varphi \subset G$.
Zeigen Sie: $\ker \varphi$ ist Normalteiler in G.

Die Normalteiler sind wichtig, weil bezüglich einer solchen Untergruppe auf den Nebenklassen in natürlicher Weise eine Multiplikation erklärt werden kann. Natürlich möchte man dazu setzen: $\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{xy}$. Nun ist aber der "Repräsentant" einer Nebenklasse nicht eindeutig bestimmt. Die obige Definition ist deshalb nur sinnvoll, wenn man zeigen kann:

b) Sei G eine Gruppe und $U \subset G$ Normalteiler in G:
$\forall x, z, y, w \in G:\ \overline{x} = \overline{z} \ \wedge\ \overline{y} = \overline{w} \ \rightarrow\ \overline{xy} = \overline{zw}$

Ist U ein Normalteiler, so wird die Menge der Nebenklassen $G/U := \{\overline{x} \mid x \in G\}$ mit der eben definierten Verknüpfung selbst zu einer Gruppe, der sog. "Quotientengruppe von G modulo U".

Hier zwei kleine Knobelaufgaben in diesem Kontext:
c) Es sei G eine Gruppe, $U \subset G$ eine Untergruppe, und es gebe nur zwei verschiedene Linksnebenklassen. Zeigen Sie, daß U Normalteiler in G ist.

d) G sei eine Gruppe und es gelte $\forall x \in G:\ x^2 = e$. Zeigen Sie, daß G abelsch ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{Z}_2^3$ über dem Körper $\mathbb{Z}_2$. $\mathbb{Z}_2^3$ besitzt 8 Elemente, es ist
$\mathbb{Z}_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$. $\mathbb{Z}_2^3$ enthält den Nullraum $\{0\} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ als Unterraum und ist natürlich Unterraum auch von sich selbst.

Finden Sie alle anderen Unterräume und schreiben Sie sie konkret und in einer natürlichen Reihenfolge hin.