Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 3

Induktion:
Will man eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen beweisen, so reicht es zu zeigen:
1. $A(1)$, d.h. die Aussage trifft auf die Zahl 1 zu.
2. $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \rightarrow A(n+1)$, d.h. wenn die Aussage auf eine beliebig gegebene Zahl zutrifft, dann auch auf ihren Nachfolger.

Einen solchen Beweis nennt man einen "Induktionsbeweis".
Den Nachweis von $A(1)$ nennt man den "Induktionsanfang".
Im Schritt 2 setzt man $A(n)$ voraus und nennt dies "Induktionsvoraussetzung"; den Nachweis von $A(n+1)$ unter Benutzung dieser Voraussetzung nennt man "Induktionsschluß".
Manchmal wählt man auch eine andere ganze Zahl für den Induktionsanfang, z.B. $n=0$.

Wenn man in einer Definition wie $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ die "Pünktchen" durch etwas Präziseres ersetzen möchte, geht man ebenfalls "induktiv" vor und setzt

$$0! := 1$$
$$(n+1)! := (n!)(n+1) \quad .$$

Man nennt so etwas eine induktive oder auch rekursive Definition bzw. Konstruktion.

Ein anderes Beispiel ist die folgende rekursive Konstruktion der "Binomialkoeffizienten":
1. für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ setzt man $\binom{n}{0} := 1$, $\binom{n}{n} := 1$
2. Für $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < n < m$ setzt man $\binom{m}{n} := \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$

Damit hat man $\binom{0}{0}=1$, $\binom{1}{0}=1$, $\binom{1}{1}=1$, $\binom{2}{0}=1$, $\binom{2}{1}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2$, $\binom{2}{2}=1$ etc. und der "Binomialkoeffizient" $\binom{m}{n}$ ist für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$, $n \leq m$ definiert.

Ist in einer Menge M eine Verknüpfung + gegeben und eine Menge von Elementen $a_1, \ldots, a_n \in M$ so definiert man induktiv $\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1$ und für $1 < k \leq n$ $\sum_{i=1}^{k} a_i := \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \right) + a_k$.

Analog würde man Summen wie $\sum_{i=0}^{n} a_i$ oder $\sum_{i=m}^{n} a_i$ ($m \leq n$) definieren.

Wie schon in der Vorlesung erwähnt, besteht ein Ring aus einer Menge R, zusammen mit 2 Verknüpfungen $+, \cdot$, genannt Addition und Multiplikation.
Dabei soll gelten:
1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. $\forall x, y, z \in R: x(yz) = (xy)z$
3. Es gelten die Distributivgesetze: $\forall x, y, z \in R: x(y+z) = xy + xz,\ (y+z)x = yx + zx$.

Gibt es ein neutrales Element der Multiplikation, so redet man von einem "Ring mit 1".
Gilt das Kommutativgesetz der Multiplikation, so nennt man den Ring kommutativ.

Aufgabe 1: Man zeige durch Induktion:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Ist R ein kommutativer Ring mit 1 und sind $a, b \in R$, so gilt die binomische Formel:
$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

c) Es gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$, $n \leqslant m$: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.
(Hinweis: Induktion über m mit Induktionsanfang $m=0$.

d) Ist R ein Ring mit 1 und $a \in R$, so gilt $(1-a) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a^i \right) = 1 - a^{n+1}$

e) Die Peano Axiome kann man so formulieren:

Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$ mit einer injektiven Abbildung $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
sowie ein Element $1 \in \mathbb{N}$, welches nicht im Wertebereich von S liegt[1].
Ist außerdem $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit den Eigenschaften

1. $1 \in M$
2. $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \in M \rightarrow S(n) \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$

Die Abbildung S soll offenbar jeder natürlichen Zahl ihren Nachfolger zuordnen und die natürliche Zahl 1 hat die Sonderrolle, daß sie nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl ist. Die Folge der natürlichen Zahlen wird jetzt also $1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))),$ etc.

Man definiert jetzt Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$ durch rekursive Konstruktionen auf der Basis der Zähloperation S, nämlich

$$n+1 := S(n), \ \ n+S(m) := S(n+m)$$
$$n \cdot 1 := n, \ \ n \cdot S(m) := n \cdot m + n$$

Als nächstes muß man jetzt alle algebraischen Eigenschaften von Addition und Multiplikation durch Induktion zeigen und darf zunächst nur die Eigenschaften von S benutzen.

Beweisen Sie dementsprechend das Kommutativgesetz der Addition:
$\forall n, m \in \mathbb{N}: \ n+m = n+m$

Hinweis: Formulieren Sie die Behauptung als $\forall n \in \mathbb{N}: \ (\forall m \in \mathbb{N}: n+m = n+m)$ und beginnen eine Induktion über n . Der Induktionsanfang ist dann die Aussage $\forall m \in \mathbb{N}: \ 1+m = m+1$.
Beweisen Sie diese nun durch Induktion über m . Etc.

---

1 Allein damit schon kann $\mathbb{N}$ keine endliche Menge sein.