Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 2

Aufgabe 1
Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.
Man erinnere sich an die Definition der Urbildmenge: Ist $V \subset N$, so setzt man
$f^{-1}(V) := \{x \in M \mid f(x) \in V\}$. Durch $V \rightarrow f^{-1}(V)$ ist eine Abbildung $\wp(N) \rightarrow \wp(M)$ definiert, die wir hier Φ nennen.

Man zeige:
a) *f* ist genau dann injektiv, wenn Φ surjektiv ist.
b) *f* ist genau dann surjektiv, wenn Φ injektiv ist.

Aufgabe 2
Sei *G* eine Gruppe mit neutralem Element *e*.
$H \subset G$ heißt Untergruppe, wenn $e \in H$ und $\forall x, y \in G: xy \in H$ und $\forall x \in H: x^{-1} \in H$.
Man überlegt leicht, daß *H* genau dann Untergruppe von *G* ist, wenn gilt: $\forall x, y \in H: y^{-1} x \in H$.

Sei nun *H* eine Untergruppe von *G*.
Für $x, y \in G$ setze man $x \sim y$ gdw. $y^{-1} x \in H$.

a) Man zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf *G* ist.
b) Ist $x \in G$, so zeige man, daß die Äquivalenzklasse $\bar{x}$ die Form hat $\bar{x} = \{xz \mid z \in H\}$.
(Für die Menge $\{xz \mid z \in H\}$ schreibt man auch kurz xH.)

c) Man zeige, daß die durch $z \rightarrow xz$ gegebene Abbildung $H \rightarrow xH$ bijektiv ist.
(Daraus folgt offenbar, daß alle Äquivalenzklassen der obigen Äquivalenzrelation gleich viele Elemente besitzen.)

Aufgabe 3
Ist $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ so gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{N}_0$, $r < b$ mit $a = qb + r$ (Division mit Rest.) Man setze nun, wie in vielen Programmiersprachen, $a \% b := r$.

Man betrachte die 12-elementige Menge $G := \{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$ mit der Verknüpfung $x * y = (xy) \% 21$, d.h. man multipliziert zunächst mit der üblichen Multiplikation in den natürlichen Zahlen und nimmt dann den Rest bei der Division durch 21. Mit dieser Verknüpfung wird *G* zu einer Gruppe.

a) Man suche Untergruppen mit 2,3,4 und 6 Elementen.
b) Man nehme eine Untergruppe *H* mit 3 Elementen und schreibe alle Äquivalenzklassen der in Aufg. 2 definierten Äquivalenzrelation hin.

Punkteverteilung:
1a,1b,2a,2b,2c,3a,3b: je 1 Punkt, also je ca. 14% .