Äußere Algebra

Man erinnere sich:
Eine assoziative Algebra A ist ein K-Vektorraum, der gleichzeitig ein Ring ist, wobei es noch eine natürliche Verträglichkeitsbedingung zwischen der Multiplikation mit Skalaren und der Ringmultiplikation gibt: $\forall \lambda \in K\, a, b \in A:\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

Hat man eine Zerlegung von A in Untervektorräume A_n, so daß $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ oder $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, und gilt $x \in A_m, y \in A_n \to xy \in A_{m+n}$, so spricht man von einer *graduierten Algebra*.

Ist V ein K-Vektorraum, so kennen wir bereits die Tensoralgebra $\bigotimes V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\bigotimes^n V \right)$ als graduierte assoziative Algebra, wie im Kapitel über das Tensorprodukt gezeigt wurde. Dabei galt $\bigotimes^0 V = K$ und $\bigotimes^1 V = V$. Außerdem kennen wir die Polynomalgebra $K[X]$ als graduierte assoziative Algebra; die Polynommultiplikation in $K[X]$ ist sogar kommutativ; die „Graduierung“, also die direkte Summenzerlegung $K[X] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n[X]$ ist durch die eindimensionalen Vektorräume $M_n[X] = \left\{ aX^n \middle| a \in K \right\}$ – das sind die Monome vom Grad n – gegeben, während bei n-dimensionalem V die Dimension der "Summanden" $\bigotimes^m V$ den Wert n^m hat.

Ausgehend von der Tensoralgebra wollen wir eine weitere graduierte assoziative Algebra konstruieren, die sog. *Äußere Algebra* $\Lambda V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\Lambda^n V \right)$, welche grundlegend für die Determinantentheorie ist. Die Multiplikation in ΛV wird meist mit $\wedge$ bezeichnet. Wie bei der Tensoralgebra soll gelten: $\Lambda^0 V = K$ und $\Lambda^1 V = V$. Für $v, w \in V$ hat man dann $v \wedge w \in \Lambda^2 V$, aber anders als beim Tensorprodukt hat man hier: $\forall v \in V:\ v \wedge v = 0$.

Damit folgt sofort $0 = (v+w) \wedge (v+w) = v \wedge v + v \wedge w + w \wedge v + w \wedge w = v \wedge w + w \wedge v$ und wir haben die *Antikommutativität* des $\wedge$-Produkts, d.h. $\forall v, w \in V: v \wedge w = -w \wedge v$ [1]. Ebenso folgt sofort, daß für $a_1, \ldots, a_N \in V$ gilt: $a_1 \wedge \ldots \wedge a_N = 0$, sobald ein Faktor mehrfach vorkommt.

Wir vertagen die Konstruktion von ΛV, um zunächst eine weitere wesentliche Konsequenz der Bedingung $v \wedge v = 0$ zu zeigen, nämlich

Sind $v_1, \ldots, v_N \in V$ linear abhängig, so ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_N = 0$

Nehmen wir nämlich oBdA an, daß $v_N = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i v_i$, so ergibt sich

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_N = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{N-1} \wedge \left(\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i v_1 \wedge \ldots v_{N-1} \wedge v_i .$$

Da jetzt mindestens der Faktor v_i doppelt vorkommt, sind alle Summanden gleich Null, und daher $v_1 \wedge \ldots \wedge v_N = 0$.

---

1 Ist char $K = 2$, so folgt offenbar nur $v \wedge w = v \wedge w$, und dies ist nicht weiter interessant.

Als Ergebnis der Konstruktion von ΛV wird sich weiterhin ergeben, daß auch umgekehrt gilt:

Sind $v_1, \ldots, v_N \in V$ linear unabhängig, so ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_N \neq 0$.

Ebenso wird sich ergeben, $\Lambda^N V$ als Vektorraum von den Produkten $v_1 \wedge \ldots \wedge v_N$ aufgespannt wird. Da für $N > \dim V$ eine Menge von Vektoren $v_1, \ldots, v_N \in V$ immer linear abhängig ist und daher $v_1 \wedge \ldots \wedge v_N = 0$ gilt, folgt $\Lambda^N V = 0$.

Daher haben wir im Falle $\dim V = n$: $\Lambda V = \bigoplus_{i=0}^{n} \left(\Lambda^i V\right)$

Konstruktion von ΛV

Wie üblich ist die Konstruktion, oberflächlich betrachtet, häßlich, während das Ergebnis, die graduierte Algebra ΛV , doch sehr schön ist.

Man geht aus von der Tensoralgebra $\bigotimes V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\bigotimes^n V\right)$.

Für $k \geqslant 2$ betrachten wir in den Unterräumen $\bigotimes^n V$ die Teilmengen $S_k := \left\{ a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \middle| \ a_1, \ldots, a_k \in V, \exists 1 \leqslant i, j \leqslant k: \ a_i = a_j \right\}$, also diejenigen Produkte, in denen mindestens ein Faktor mehrfach vorkommt.

Als nächstes setzen wir für $k \geqslant 2$ $U_k := \langle S_k \rangle$. Die U_k sind offenbar Untervektorräume der $\bigotimes^k V$. Für $k = 1,2$ setzen wir $U_k := 0$.

Als nächstes definieren wir für $k \geqslant 2$ $\Lambda^k V := \left(\bigotimes^k V\right) / U_k$, bilden also den Quotienten; die Quotientenbildung in den Fällen $k = 1,2$ ist trivial: es ist $\Lambda^0 V = K$ und $\Lambda^1 V = V$, wie bei den Tensorräumen.

Für $\bar{a} \in \Lambda^i V, \bar{b} \in \Lambda^j V$, $i, j \geqslant 0$ definieren wir schließlich $\bar{a} \wedge \bar{b} := \overline{a \otimes b}$.

Zu zeigen ist zunächst, daß dadurch eine bilineare Abbildung $\Lambda^i V \times \Lambda^j V \to \Lambda^{i+j} V$ definiert wird.

Der Fall $i + j < 2$ ist relativ trivial, wir gehen also von $i + j \geqslant 2$ aus.
Problematisch ist, wie immer bei Definitionen, die mit Hilfe von Repräsentanten von Äquivalenzklassen erfolgen, die Wohldefiniertheit der Abbildung:

Wenn also $\bar{a} = \overline{a'}$ mit $a, a' \in \bigotimes^i V$ und $\bar{b} = \overline{b'}$ mit $b, b' \in \bigotimes^i V$, so ist zu zeigen, daß $\overline{a \otimes b} = \overline{a' \otimes b'}$. Das heißt, wenn $a - a' \in U_i$ und $b - b' \in U_j$, so ist zu zeigen, daß $a \otimes b - a' \otimes b' \in U_{i+j}$.

Sei also $a' = a + u$ mit $u \in U_i$ und $b' = b + v$ mit $v \in U_j$. Dann ist $a' \otimes b' = (a + u) \otimes (b + v) = a \otimes b + a \otimes v + u \otimes b + u \otimes v$. Man überlegt leicht, daß jeder der letzten drei Summanden Element von U_{i+j} ist. Zeigen wir dies exemplarisch für $a \otimes v$ für $j \geqslant 2$:

a ist eine endliche Linearkombination von Tensorprodukten der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_i$,
v ist eine endliche Linearkombination von Elementen von S_j . Elemente von S_j bestehen aber gerade aus j-fachen Tensorprodukten von Vektoren, wobei zwei nebeneinanderliegende Faktoren gleich sind. Offenbar ist dann $a \otimes v$ eine Linearkombination von (i+j)-fachen Tensorprodukten von Vektoren, bei denen ebenfalls jeweils zwei nebeneinanderliegende Faktoren gleich sind. Damit ist $a \otimes v \in U_{i+j}$.

Die Bilinearität des $\wedge$ - Produkts folgt sofort aus der des Tensorprodukts.

Durch Induktion über die Anzahl der Faktoren folgt leicht, daß $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \overline{v_1 \otimes \ldots \otimes v_n}$.

Letztlich soll nur noch gezeigt werden:
Sind $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so bilden $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ eine Basis von $\Lambda^k V$, welches somit $\binom{n}{k}$ - dimensional ist.

Daraus folgt dann auch, daß für linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ gilt: $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$.
$v_1, \ldots, v_k$ lassen sich bekanntlich zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ ergänzen. Als Basiselement kann dann $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ offenbar nicht Null sein.

Daß die $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ ein Erzeugendensystem von $\Lambda^k V$ bilden, folgt direkt aus der Tatsache, daß die $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k}$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n$ ein Erzeugendensystem von $\bigotimes^k V$ sind.

Also geht es nur noch um die lineare Unabhängigkeit ($k \geqslant 2$):

Wie schon beim Tensorprodukt geht man hier den Umweg über eine **universelle Eigenschaft**:

> Ist W ein K-Vektorraum und $\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\mathrm{mal}} \to W$ multilinear und alternierend,
> so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\Phi : \Lambda^k V \to W$ mit:
>
> $\forall v_1, \ldots, v_k \in V : \varphi(v_1, \ldots, v_k) = \Phi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)$.

Dies zeigt man so:
Zunächst folgt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, daß es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\Psi : \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k-\mathrm{mal}} \to W$ gibt, mit
$\forall v_1, \ldots, v_k \in V : \varphi(v_1, \ldots, v_k) = \Psi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$. Diese Abbildung Ψ läßt sich eindeutig zur gewünschenten Abbildung $\overline{\Psi} = \Phi$ auf den Quotienten $\Lambda^k V := \left(\bigotimes^k V\right) / U_k$ "herunterdrücken", wenn $U_k \subset \ker \Psi$. Dazu muß man nur zeigen, daß für das Erzeugendensystem $S_k \subset U_k$ gilt:
$S_k \subset \ker \Psi$. Jedes Element von S_k ist aber ein k-faches Tensorprodukt der Form
$v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v \otimes v \otimes v_{i+2} \cdots \otimes v_k$, und daher gilt
$\Psi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v \otimes v \otimes v_{i+2} \cdots \otimes v_k) = \varphi(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v, v_{i+2} \cdots, v_k)$ und dieser Ausdruck ist Null, weil φ alterniert.

Wie folgt nun die lineare Unabhängigkeit der $v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}\in\Lambda^k V$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$, wenn $v_1,\ldots,v_n\in V$ eine Basis von *V* ist?

Sei $\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1\ldots i_k} v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}=0$.

Wir wählen ein festes Tupel $1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant n$, bilden zu $a_1,\ldots a_k\in V$ die Basis-Darstellungen $a_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$ gegebene *nxk*-Matrix *A* und bilden die Abbildung $\varphi:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{k-\text{mal}}\to K$, indem wir setzen: $\varphi(a_1,\ldots,a_k):=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\epsilon_\sigma a_{j_{\sigma(1)}j_1}\cdots a_{k_{\sigma(1)}j_k}$. (Letztlich ist dies die Determinante der *kxk*-Matrix, die man erhält, wenn man in der *nxk*-Matrix *A* alle bis auf die Zeilen $1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant n$ streicht.)

In den Übungsaufgaben wurde gezeigt, daß eine Abbildung wie φ multilinear und alternierend ist. Man überlegt auch leicht, daß $\varphi(v_{j_1},\ldots,v_{j_k})=1$ und $\varphi(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})=0$, wenn die Indizes $(i_1,\ldots,i_k)$ nicht identisch mit dem oben vorgegebenen Tupel $(j_1,\ldots,j_k)$ sind.
Aufgrund der universellen Eigenschaft für $\Lambda^k V$ gibt es also eine lineare Abbildung $\Phi:\Lambda^k V\to K$ mit $\Phi(v_{j_1}\wedge\ldots\wedge v_{j_k})=\varphi(v_{j_1},\ldots,v_{j_k})=1$ und $\Phi(v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k})=\varphi(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})=0$ für $(i_1,\ldots,i_k)\neq(j_1,\ldots,j_k)$. Jetzt rechnen wir

$0=\Phi\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}\right)=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1\ldots i_k}\Phi\left(v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}\right)=\lambda_{j_1\ldots j_k}$, also $\lambda_{j_1\ldots j_k}=0$.

Da aber das Tupel $(j_1,\ldots,j_k)$ beliebig gewählt war, sind alle Linearkoeffizienten in der Darstellung $\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}=0$ gleich Null. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der $v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}\in\Lambda^k V$ gezeigt!