2. Betrachten Sie die 2-dimensionale reelle Untermannigfaltigkeit $P \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung $0 = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ gegeben ist. Berechnen Sie die Volumenform auf P sowie den Flächeninhalt des über dem Einheitskreis der x, y-Ebene liegenden Stücks von P.

Hier der „kanonische Lösungsweg". (Jeder andere ist natürlich auch ok.)

Der Inhalt einer Mannigfaltigkeit ist definitionsgemäß das Integral über die Volumenform. Diese ist also zu berechnen. Dafür gibt es eine Formel, die die Volumenform auf den Metriktensor zurückführt; dies wird unten benutzt.

Auf P ist offenbar $\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$, daher hat der Metriktensor
$\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ (also das Skalarprodukt auf den Tangentialräumen)
auf P die Form $(1+4x^2)\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + 4xy(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x) + (1+4y^2)\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$.

Man bildet jetzt die (symmetrische, positiv definite) Koeffizientenmatrix $G = \begin{pmatrix} 1+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}$
des obigen Tensors. Lt. Vorlesung (am kommenden Donnerstag) errechnet sich die Volumenform auf P als $\omega = \sqrt{|\det G|}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Als Parametrisierung des zu messenden Teils des Paraboloiden wählen wir die Abbildung $\psi : U \to \mathbb{R}^3$, $\psi(u, v) = (u, v, u^2+v^2)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis ist. Es ist vernünftig, die Koordinatennamen auf dem parametrisierenden Raum anders zu benennen als in dem parametrisierten.

Jetzt ist definitionsgemäß (auch Vorlesung vom kommenden Donnerstag)

$$\text{Fläche Paraboloid} = \int_P \omega = \int_U \psi^* \omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} \sqrt{1+4\mathrm{r}^2}\, r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \quad .$$

Dabei wurden Polarkoordinaten benutzt und die Formel $dx \wedge dy = r\,dr \wedge d\varphi$, die sich sofort aus $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ergibt.

Man muß also nur das innere Integral ausrechnen können.
Dazu substituiere man zunächst $s = r^2$ und hat damit $\mathrm{d}s = 2r\,\mathrm{d}r$. Anschließend substituiert man $t = 1 + 4\mathrm{s}$ und muß dann nur noch eine Stammfunktion von $\sqrt{t}$ hinschreiben.

Wenn man sich den Paraboloiden von oben in den Kreis projiziert denkt, so sieht man in den durch die Poloarkoordinaten gegebenen kleinen Segmenten, daß die Flächenstückchen des Paraboloiden ja etwas größer sein müssen. Dieses Größersein wird genau durch den Faktor $\sqrt{1+4r^2}$ beschrieben, der ja in der Mitte gleich 1 ist. Ganz weit draußen hat man ja Rechtecke, die dann um den Faktor ≈2r verlängert sind. Das sieht man auch mit bloßem Auge.

In der Vorlesung werde ich so die Oberfläche der S^2 ausrechnen.