Volumen der S^3

Bestimmen wir zunächst das Volumen der S^1 .
Dazu betrachte man die 1-Form $\omega = xdy - ydx$ im $\mathbb{R}^2$ und weise nach, daß es sich um die Volumenform der S^1 handelt, d.h. daß diese Form auf einem orientierten Einheitsvektor den Wert 1 ergibt. Tatsächlich erweist sich z.B. der Tangentialvektor (-y, x) im Punkt (x, y) als richtig orientiert, denn $(\omega(x,y))(-y,x) = x^2 + y^2 = 1$.

Betrachtet man die Parametrisierung des oberen Halbkreises durch $t \to (t, \sqrt{1-t^2})$, $-1 < t < 1$, so zeigen die induzierten Tangentialvektoren $(1, -t/\sqrt{1-t^2})$ in die verkehrte Richtung. Man müßte also umparametrisieren durch $t \to (-t, \sqrt{1-t^2})$, um eine orientierungserhaltende Abbildung zu bekommen. Alternativ können wir mit $\psi(t) = (t, -\sqrt{1-t^2})$ den unteren Halbkreis S^1_- parametrisieren, und haben dann eine orientierungserhaltende Abbildung.

Jetzt ist

$$\int_{S^1_-} \omega = \int_{-1}^{1} \omega(\psi(t))(1, t/\sqrt{1-t^2})dt = \int_{-1}^{1} \left(t \cdot t/\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-t^2} \cdot 1\right) dt = \int_{-1}^{1} \left(t \cdot t/\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-t^2} \cdot 1\right) dt =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(1/\sqrt{1-t^2}\right) dt$$

Substituiert man $t = \sin s$, so erhält man $\int_{s=-\pi/2}^{\pi/2} (\cos s / \cos s)\, ds = \pi$, und dies ist bekanntlich die Länge des Halbkreises.

Nun der Fall der S^3 .

Wir weisen wieder nach, daß $\omega = x\, dy \wedge dz \wedge dw - y\, dx \wedge dz \wedge dw + z\, dx \wedge dy \wedge dw - w\, dx \wedge dy \wedge dz$ die Volumenform der S^3 ist, indem wir in einem beliebigen Punkt v_1 der Sphäre für ein orientiertes Orthonomalsystem v_2, v_3, v_4 des Tangentialraums in v_1 , der ja ein dreidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist, die Form $\omega(p)(v_2, v_3, v_4)$ auswerten. Dabei erhalten wir genau die Determinante der orthonormalen Matrix, die durch die 4 Spalten $v_1, \ldots, v_4$ gegeben ist. Die Orientierung des Tangentialraums, d.h. die Anordnung der orthonormalen Vektoren v_2, v_3, v_4 ist gerade so gewählt, daß diese Determinante 1 und nicht etwa -1 ist. Damit ist ω die Volumenform auf S^3 .

Wir parametrisieren jetzt die untere Halbkugel S^3_- durch $\psi : U \to \mathbb{R}^4$ mit $\psi(t, u, v) = (t, u, v, -\sqrt{1-t^2-u^2-v^2})$, wobei U die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ ist. Auch diese Parametrisierung ist orientierungserhaltend.

Wie oben müssen wir jetzt $\psi^* \omega$ bestimmen, um das Integral $\int_{S^3_-} \omega = \int_U \psi^* \omega$ zu berechnen. Man muß also in ω für x ψ_1 bzw. t einsetzen, für dx setzen wir ein $d\,\psi_1$ bzw. dt , etc. w lassen wir als Funktion von t, u, v stehen und haben $w = \sqrt{1-t^2-u^2-v^2}$ und ersetzen somit dw durch $\frac{1}{w}(tdt + udu + vdv)$, und man rechnet nun aus, daß $\psi^* \omega = \frac{1}{w} dt \wedge du \wedge dv$. Für das Integral auf der Kugel U benutzen wir Polarkoordinaten $t = r \cos\varphi \cos\theta$, $u = r \sin\varphi \cos\theta$, $v = r \sin\theta$, $r = \sqrt{t^2+u^2+v^2}$ und haben $dt = \cos\varphi \cos\theta\, dr - r \sin\varphi \cos\theta\, d\varphi - r \cos\varphi \sin\theta\, d\theta$,

$du = \sin\varphi \cos\theta\, dr + r\cos\varphi \cos\theta\, d\varphi - r\sin\varphi \sin\theta\, d\theta$, $dv = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$, sowie $w = \sqrt{1-r^2}$. Damit wird $dt \wedge du \wedge dv = r^2 \cos\theta\, dr \wedge d\varphi \wedge d\theta$, also

$$\int_U \frac{1}{w}\, dt \wedge du \wedge dv = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}\, d\theta\, d\varphi\, dr = 4\pi \int_{r=0}^{1} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\, dr \quad .$$

Mit einer geeigneten Substitution findet man für das überlebende Integral den Wert $\pi/4$, so daß das Volumen der halben S^3 gleich π^2 ist. Das stimmt auch.