Sei M ein metrischer Raum, $U \subset M$ ein echte offene Teilmenge, so daß das Komplement U^c eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge von M ist.

Für $x \in M$ setze man $d(x) := \inf\{d(x,y) \mid y \in U^c\}$. Damit ist eine echt positive Funktion $d: U \to \mathbb{R}$ erklärt, die man zu Recht Randabstandsfunktion von U nennt.

Satz: Die Randabstandsfunktion ist stetig auf U.

Beweis:
Wäre sie nicht stetig, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ und einen Punkt $x_0 \in U$, so daß man zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in U$ finden kann mit $d(x, x_0) < \delta$ und $|d(x) - d(x_0)| \geqslant \epsilon$.

Nehmen wir also $\delta = \epsilon/5$ und ein beliebiges $x \in U$ mit $d(x, x_0) < \delta$.

Zu x_0 finden wir einen Punkt $y_0 \in U^c$ mit $d(x_0) \leqslant d(x_0, y_0) \leqslant d(x_0) + \epsilon/5$. Damit gilt auch
a) $\forall \tilde{y} \in U^c: d(x_0, y_0) \leqslant d(x_0, \tilde{y}) + \epsilon/5$ bzw. $\forall \tilde{y} \in U^c: d(x_0, y_0) - d(x_0, \tilde{y}) \leqslant \epsilon/5$.
Man beachte, daß für die meisten $\tilde{y} \in U^c$ die letzte Ungleichung trivial ist, da die linke Seite negativ sein wird. Interessant ist die Ungleichung für die $\tilde{y}$, die noch näher am Infimum liegen als y_0.

Entsprechend finden wir zu x einen Punkt $y \in U^c$ mit $d(x) \leqslant d(x, y) \leqslant d(x) + \epsilon/5$. Also
b) $\forall \tilde{y} \in U^c: d(x, y) \leqslant d(x, \tilde{y}) + \epsilon/5$, bzw. $\forall \tilde{y} \in U^c: d(x, y) - d(x, \tilde{y}) \leqslant \epsilon/5$.

Die Aussagen a), b) erhalten wir direkt aus der Definition von d.
Problematisch erscheint, daß der Punkt y ganz woanders liegen kann als der Punkt y_0

Trotzdem wird abgeschätzt:

$$\epsilon = |d(x) - d(x_0)| \leqslant |(d(x_0, y_0) - d(x_0)) - (d(x, y) - d(x)) + (d(x, y) - d(x_0, y_0))| \leqslant$$
$$|d(x_0, y_0) - d(x_0)| + |d(x, y) - d(x)| + |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leqslant \epsilon/5 + \epsilon/5 + |d(x, y) - d(x_0, y_0)|,$$

insgesamt also

$$3\epsilon/5 \leqslant |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \quad (*)$$

Wie gesagt, problematisch erscheint, daß zwar x nahe bei x_0 liegt, aber y nicht unbedingt nahe bei y_0, und dies machte zumindest für mich die Aufgabe psychologisch schwierig, bis ich sah, daß man die obigen Aussagen a), b) formulieren und dann einsetzen kann. Interessant fand ich auch, daß es mir nicht gelungen ist, das Ergebnis zu ergoogeln, obwohl es sich bei obigem Satz m.E. um eine wichtige Aussage handelt.

I) In der Aussage (*) nehmen wir an, daß $d(x, y) \geqslant d(x_0, y_0)$, so daß sich ergibt

$$3\epsilon/5 \leqslant d(x, y) - d(x_0, y_0) \leqslant d(x, y) - d(x, y_0) + \epsilon/5 \quad (**)$$

denn $d(x, y_0) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, y_0)$ also $-d(x_0, y_0) \leqslant -d(x, y_0) + d(x, x_0) \leqslant -d(x, y_0) + \epsilon/5$.

Mit der obigen Aussage b) können wir jetzt sich (**) zu Ende abschätzen:

$$3\epsilon/5 \leqslant d(x, y) - d(x_0, y_0) \leqslant (d(x, y) - d(x, y_0)) + \epsilon/5 \leqslant \epsilon/5 + \epsilon\, 5$$

, und wir haben den Widerspruch $\epsilon/5 \leqslant 0$.

II) Analog führt man jetzt unter Benutzung von a) die Annahme $d(x, y) \leqslant d(x_0, y_0)$ zum Widerspruch, so daß letztlich die Randabstandsfunktion d nicht unstetig sein kann.