U sei eine echte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.
Dann ist U parakompakt, d.h. jede offene Überdeckung von U besitzt eine lokal endliche Verfeinerung.

Parakompaktheit ist wichtig, wenn man Teilungen der Eins konstruieren will.

Definitionen:
Eine Überdeckung $(V_\beta)_{\beta\in B}$ heißt Verfeinerung der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, wenn es zu jedem $\beta\in B$ ein $\alpha\in A$ gibt mit $V_\beta\subset U_\alpha$.

Die Überdeckung $(V_\beta)_{\beta\in B}$ heißt lokal endlich, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge $K\subset U$ nur endlich viele $\beta\in B$ gibt mit $K\cap V_\beta\neq\emptyset$.

Man gehe aus von einer offenen Überdeckung $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ von U.
Wir wissen aus den vorgehenden Aufgaben, daß es eine abzählbare Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die ebenfalls eine Überdeckung von U bildet, und für die $U_n\subset\subset U_{n+1}$.

Man bilde jetzt folgende Folge offener Mengen: $V_1:=U_4$, $V_n=U_{n+3}-\overline{U_{n-1}}$ für $n\geqslant 2$,
und folgende Folge kompakter Mengen $K_1:=\overline{U_3}$, $K_n:=\overline{U_{n+2}}-U_n$ für $n\geqslant 2$.

Um eine Vorstellung zu gewinnen, male man sich die Familie (U_n) als Folge ineinanderliegender Gebiete hin, und davon ausgehend die ineinanderliegenden Ringe K_2 , V_2 ; K_3 , V_3 , etc.

Man sieht dann sofort: sowohl die (V_n) wie die (K_n) überdecken U; es ist $K_n\subset V_n$ und $V_n\cap V_{n+k}=\emptyset$ für $k\geqslant 4$. Außerdem ist $U_m\subset\bigcup_{n=1}^{m}K_n$.

Man gebe jetzt $n\in\mathbb{N}$ vor.
Zu jedem $x\in K_n$ gibt es ein $\alpha\in A$ mit $x\in W_\alpha$.
Man wähle $U(x)=W_\alpha\cap V_n$ und setze $Z_n:=\{U(x)\,|\,x\in K_n\}$. Z_n ist eine offene Überdeckung von K_n . Also gibt es eine endliche Überdeckung T_n von K_n durch Mengen, die in V_n enthalten sind und in einer der Mengen der Ausgangsüberdeckung liegen.

Die Menge $T:=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$ bildet also offenbar eine offene Überdeckung von U, welche eine Verfeinerung der Ausgangsüberdeckung darstellt.

Wir können jetzt auch zeigen, daß T lokal-endlich ist.
Sei dazu eine beliebige kompakte Teilmenge $L\subset U$ gegeben.
Es ist zu zeigen, daß L mit nur endlich vielen Elementen von T einen nicht-leeren Schnitt hat.
Zunächst bilden ja die (U_n) eine offene Überdeckung von L, daher gibt es ein $m\in\mathbb{N}$ mit $L\subset U_m\subset\bigcup_{n=1}^{m}K_n$. L wird also überdeckt durch die endlich vielen Mengen in $T_1\cup\ldots\cup T_m$.
Andererseits können nach Konstruktion höchstens zusätzlich noch die endlich vielen Mengen in $T_{m+1},T_{m+2},T_{m+3},T_{m+4}$ mit denen in $T_1\cup\ldots\cup T_m$ und damit mit L einen nicht-leeren Schnitt besitzen.