Blatt 8 Lösung Aufg. 2a

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen mit $[0,1] \times U \subset V$;
$\psi_0, \psi_1 : U \to V$ seien gegeben durch $\psi_0(x) := (0,x), \psi_1(x) := (1,x)$.
a) Man zeige: Ist $\omega \in \mathscr{E}^k(V)$ geschlossen, so ist $\psi_1^* \omega - \psi_0^* \omega$ exakt.

Hinweis: Um die Übersicht zu behalten, bezeichne die Koordinaten auf U mit $x_1, \ldots, x_n$ und die Koordinaten auf V mit $t, x_1, \ldots, x_n$. Zu konstruieren ist eine Form $\eta \in \mathscr{E}^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \psi_1^* \omega - \psi_0^* \omega$. Schreibt man jetzt alles richtig hin, so sieht man, daß die Koeffizienten von η durch Integrale der Form $\int_0^1 \alpha(t,x)\,dt$ zu definieren sind; man benötigt dann, daß $\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \alpha(t,x)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial \alpha(t,x)}{\partial x_i} dt$, was zu begründen ist.

Man stelle sich die Menge $[0,1] \times U$ vor als einen Zylinder, dessen Deckel und Boden wie U aussieht. V ist eine offene Umgebung des Zylinders. Eine k-Form ω ist eine Kombination von Dach-Produkt-Termen, von denen einige dt enthalten, andere nicht, also

$\omega = \alpha + dt \wedge \beta$
$0 = d\omega = d\alpha - dt \wedge d\beta$, also $dt \wedge d\beta = d\alpha$.

Für $t \in [0,1]$ und $x \in U$ setzen wir $\alpha_t(x) = \alpha(t,x)$.
Für jedes t ist α_t eine geschlossene k-Form auf der Scheibe $U_t = \{t\} \times U$.

Damit ist $\psi_1^* \omega = \alpha_1$ und $\psi_0^* \omega = \alpha_0$, und wir wollen eine (k-1)-Form η auf U finden mit $d\eta = \alpha_1 - \alpha_0$.

Nun ist β eine (k-1)-Form.
Irgendwie erscheint es dann nicht abwegig, Folgendes zu probieren $\eta := \int_{t=0}^1 \beta\,dt$.
Schreiben wir dies konkret koeffizientenweise hin, dann wird es auch sinnvoll:

Es ist $\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq n} \beta_{i_1 \ldots i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_{k-1}}$.

Unter $\int_{t=0}^1 \beta\,dt$ wollen wir dann den Ausdruck
$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq n} \left(\int_{t=0}^1 \beta_{i_1 \ldots i_{k-1}}(t, x_1, \ldots, x_n)\,dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_{k-1}}$ verstehen. Während die Koeffizienten $\beta_{i_1 \ldots i_{k-1}}$ Funktionen von (n+1)-Variablen sind, wird dabei eine Variable wegintegriert.

Wir setzen also $\eta := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq n} \eta_{i_1 \ldots i_{k-1}} dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_{k-1}}$ mit
$\eta_{i_1 \ldots i_{k-1}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{t=0}^1 \beta_{i_1 \ldots i_{k-1}}(t, x_1, \ldots, x_n)\,dt$.

Nun gilt ganz allgemein

$$d\,\eta=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{k-1}\leqslant n} d\,\eta_{i_1\ldots i_{k-1}}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots dx_{i_{k-1}}=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{k-1}\leqslant n}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\eta_{i_1\ldots i_{k-1}}}{\partial\,x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots dx_{i_{k-1}}=$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{\partial\,\eta_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}}{\partial\,x_{i_j}}\right)dx_{i_1}\wedge\ldots dx_{i_k}$$

und dieser Ausdruck soll gleich sein

$$\alpha_1-\alpha_0=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots i_k\leqslant n}\left(\alpha_{i_1\ldots i_k}(1,x_1,\ldots,x_n)-\alpha_{i_1\ldots i_k}(0,x_1,\ldots,x_n)\right)dx_{i_1}\wedge\ldots dx_{i_k}\quad .$$

Für die einzelnen Koeffizienten bedeutet dies, daß gelten soll:

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{\partial\,\eta_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}}{\partial\,x_{i_j}}=\alpha_{i_1\ldots i_k}(1,x_1,\ldots,x_n)-\alpha_{i_1\ldots i_k}(0,x_1,\ldots,x_n)\quad .$$

Bedenkt man die Definitionsgleichung $\eta_{i_1\ldots i_{k-1}}(x_1,\ldots,x_n)=\int_{t=0}^{1}\beta_{i_1\ldots i_{k-1}}(t,x_1,\ldots,x_n)\,dt$ und die Tatsache, daß man die partielle Ableitung unter das Integral ziehen kann, ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\int_{t=0}^{1}\frac{\partial\,\beta_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}}{\partial\,x_{i_j}}(t,x_1,\ldots,x_n)\,dt=\alpha_{i_1\ldots i_k}(1,x_1,\ldots,x_n)-\alpha_{i_1\ldots i_k}(0,x_1,\ldots,x_n)\quad\text{bzw.}$$

$$\int_{t=0}^{1}\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{\partial\,\beta_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}}{\partial\,x_{i_j}}(t,x_1,\ldots,x_n)\right)dt=\alpha_{i_1\ldots i_k}(1,x_1,\ldots,x_n)-\alpha_{i_1\ldots i_k}(0,x_1,\ldots,x_n)\quad (*)$$

Daß ω geschlossen war, bedeutete aber $dt\wedge d\,\beta=d\,\alpha$, und auf Koeffizientenebene heißt dies:

$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{\partial\,\beta_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}}{\partial\,x_{i_j}}=\frac{\partial\,\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial\,t}$, d.h. aus der Gleichung (*)wird

$\int_{t=0}^{1}\frac{\partial\,\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial\,t}(t,x_1,\ldots,x_n)\,dt=\alpha_{i_1\ldots i_k}(1,x_1,\ldots,x_n)-\alpha_{i_1\ldots i_k}(0,x_1,\ldots,x_n)$, und dies ist zweifellos richtig, d.h. wir haben tatsächlich $d\,\eta=\alpha_1-\alpha_0$.

1. Beispiel: U=]0,1[

$$\omega=dt\wedge\beta+\alpha=dt\,\beta+\alpha_1\,dx$$

Dabei schreiben wir einfach $dt\wedge\beta:=\beta\,dt$, so daß

$$d\,(dt\wedge\beta)=d\,(\beta\,dt)=d\,\beta\wedge dt=\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}dx\wedge dt=-dt\wedge\left(\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}dx\right)=-dt\wedge d\,\beta$$

$\beta=\beta(t,x)$ ist eine 0-Form, also eine Funktion. und das Dachprodukt mit einer Funktion ist einfach die Skalare Multiplikation mit dieser Funktion.

$$0=d\,\omega=d\,\alpha-dt\wedge d\,\beta=\frac{\partial\,\alpha_1}{\partial\,t}dt\wedge dx-\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}dt\wedge dx\quad\text{, also}\quad\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}=\frac{\partial\,\alpha_1}{\partial\,t}\quad .$$

Setzt man jetzt $\eta=\int_0^1 \beta(t,x)\,dt$, so ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \beta(t,x)dt=\int_0^1 \frac{\partial \beta(t,x)}{\partial x}dt=\int_0^1 \frac{\partial \alpha_1(t,x)}{\partial t}dt=\alpha_1(1,x)-\alpha(0,x)$$, also

$$d\,\eta=\frac{\partial \eta}{\partial x}dx=\alpha_1(1,x)dx-\alpha_1(0,x)\,dx$$, d.h. die Form auf der rechten Seite ist exakt.

2. Beispiel

U= offene Menge im $\mathbb{R}^2$

$\omega=dt\wedge\beta+\alpha$ sei eine 2-Form also $\beta=\beta_1 dx+\beta_2 dy$ und $\alpha=\alpha_{12}\,dx\wedge dy$.

$$0=d\,\omega=-dt\wedge d\,\beta+d\,\alpha=-dt\wedge dx\wedge dy\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x}-\frac{\partial \beta_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial t}dt\wedge dx\wedge dy$$,

also $\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial t}=\frac{\partial \beta_2}{\partial x}-\frac{\partial \beta_1}{\partial y}$.

$\eta=\eta_1 dx+\eta_2 dy$ mit $\eta_1=\int_{t=0}^1 \beta_1(t,x)dt$ und $\eta_2=\int_{t=0}^1 \beta_2(t,x)\,dt$

$$d\,\eta=\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x}-\frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy=\left(\int_0^1\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x}-\frac{\partial \beta_1}{\partial y}\right)dt\right)\,dx\wedge dy=\left(\int_0^1 \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial t}dt\right)\,dx\wedge dy=$$
$$\alpha_{12}(1,x,y)\,dx\wedge dy-\alpha_{12}(0,x,y)\,dx\wedge dy$$

d.h. die Form ganz unten ist exakt.