1. Man betrachte in $U=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \middle| \epsilon<\|x\|<R\right\}$ die glatte 2-Form $\frac{1}{\|x\|^\alpha} dx_1\wedge dx_2$.

In Polarkoordinaten sieht diese so aus: $\frac{1}{r^\alpha} r\,dr\wedge d\varphi=\frac{1}{r^{\alpha-1}} dr\wedge d\varphi$.

Also ist

$$\int_{\epsilon<\|x\|<R} \frac{dx_1\wedge dx_2}{\|x\|^\alpha}=\int_{r=\epsilon}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, d\varphi\, dr=2\pi\int_{r=\epsilon}^{R} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr=\begin{cases} 2\pi/(2-\alpha)(R^{2-\alpha}-\epsilon^{2-\alpha}) & \alpha\neq 2 \\ \log(R)-\log(\epsilon) & \alpha=2 \end{cases}$$

Man sieht daß dieser Ausdruck bei $\epsilon\to 0$ für $\alpha\geqslant 2$ divergiert und für $\alpha<2$ konvergiert.
Bei $R\to\infty$ haben wir Konvergenz für $\alpha>2$ und Divergenz für $\alpha\leqslant 2$. Dies wird in Aufg. 2 benötigt.

Im $\mathbb{R}^3$ haben wir $dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3=r^2\cos\theta\; dr\wedge d\varphi\wedge d\theta$, also
$\frac{1}{\|x\|^\alpha} dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3=\frac{\cos\theta}{r^{\alpha-2}}\; dr\wedge d\varphi\wedge d\theta$, etc. im $\mathbb{R}^n$.

2a
Eigentlich war gemeint:
Die Reihe $\sum_{\substack{\omega\in D\\ \omega\neq 0}} \frac{1}{\omega^2}$ ist nicht absolut konvergent.

Die von Null verschiedenen Gitterpunkte haben die Form $\omega=m+i\,n$ mit $m,n\in\mathbb{Z}$ mit $m\neq 0$ oder $n\neq 0$, also $\frac{1}{|\omega|^2}=\frac{1}{m^2+n^2}$.

Es ist technisch am einfachsten, sich auf den ersten Quadranten zu beschränken, also nur die Divergenz von $\sum_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m\neq 0 \text{ oder } n\neq 0}} \frac{1}{m^2+n^2}$ zu zeigen

Ist $\omega=m+i\,n$, so bilden wir die halboffenen Quadrate
$Q^1_\omega=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \middle| m\leqslant x_1<m+1, n\leqslant x_2<n+1\right\}$,

Die Q_ω überdecken den ganzen ersten Quadranten, nur das Quadrat Q_0 in der Ecke bleibt frei.
Es gilt

$\forall\, x\in Q_\omega\colon\; m^2+n^2\leqslant|x|^2$, also $\forall\, x\in Q_\omega\colon \frac{1}{|x|^2}\leqslant\frac{1}{m^2+n^2}$

Wir haben daher

$$\int_{\mathbb{R}^2_*-U_{\sqrt{2}}(0)} \frac{1}{|x|^2} dx_1\,dx_2\leqslant\int_{\mathbb{R}^2_*-Q_0} \frac{1}{|x|^2} dx_1\,dx_2=\sum_{\omega\neq 0}\int_{Q_\omega} \frac{1}{|x|^2} dx_1\,dx_2\leqslant \sum_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m\neq 0 \text{ oder } n\neq 0}} \frac{1}{m^2+n^2} .$$

Da wir aus 1 wissen, daß das Integral unendlich ist, sind wir fertig.
(In Polarkoordinaten integrieren wir nicht $\varphi=0..2\pi$, sondern $\varphi=0..\pi/2$.)