Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 12 **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1	1	2a	b	3	3	Summe 120%	% bearbeitet

1. Zur Lösung der inhomogenen Cauchy-Riemann-Gleichung benutzt man das Integral $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\bar{\zeta}\wedge d\zeta$. Nun hat der Nenner im Integranden ja eine Singularität, die integrabel sein muß.

Man zeige also für $0<\epsilon<r$, $n\in\mathbb{N}$ und $\alpha\in\mathbb{R}$, daß

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<\|x\|<r}\frac{1}{\|x\|^\alpha}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n<\infty \quad \text{für } \alpha<n \quad \text{und w.}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<\|x\|<r}\frac{1}{\|x\|^\alpha}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n=\infty \quad \text{für } \alpha\geqslant n$$

Hinweis: Polarkoordinaten $r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}$ im $\mathbb{R}^n$. Man muß also die dx_i in $dr, d\varphi, d\theta_1,\ldots,d\theta_{n-2}$ umrechnen. Gegebenenfalls führe man den Beweis für n=1,2,3 oder gar nur für n=2. Beim obigen Beispielintegral geht es um den Fall $n=2,\alpha=1$.

2. Das Gitter $D:=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ist eine unendliche diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}$. Es soll eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ konstruiert werden, die in den Gitterpunkten $\omega\in D$ einen Pol zweiter Ordnung mit Hauptteil $\frac{1}{(z-\omega)^2}$ besitzt.

a) Der naive Ansatz $f(z)=\sum_{\omega\in D}\frac{1}{(z-\omega)^2}$ scheitert, denn dann müßte ja gelten $f(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\substack{\omega\in D\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{(z-\omega)^2}$, und die Reihe auf der rechten Seite müßte in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0, die keine weiteren Gitterpunkte enthält, eine holomorphe Funktion darstellen. Damit sie für jedes z in dieser Umgebung unabhängig von der Summationsreihenfolge konvergiert, müßte sie absolut konvergent sein.

Man zeige $\sum_{\substack{\omega\in D\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{(z-\omega)^2}$ ist für $z=0$ nicht absolut konvergent.

b) Von Weierstraß stammt der Ansatz $f(z) = \sum_{\omega \in D} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$

Man zeige: Ist $r > 0$ und $K = \overline{U_r(0)}$, so konvergiert die Reihe $f(z) = \sum_{\substack{\omega \in D \\ \omega \geqslant 2\mathrm{r}}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$ für $z \in K$ absolut und gleichmäßig.

Hinweis: für beide Aufgabenteile kann man das Ergebnis von Aufg. 1 benutzen.

3. Man berechne für 0<p<1 das Integral $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx := \lim_{R \to \infty} \int_{1/R}^{R} \frac{x^{p-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Dabei benutze man ein komplexes Linienintegral über die folgende geschlossene Kurve (R>1) und wende den Residuensatz an:

1. Man laufe auf der reellen Achse von 1/R bis R.
2. Anschließend durchlaufe man entgegen dem Uhrzeigersinnauf den gesamten Kreis mit Mittelpunkt 0 mit Radius R .
3. Man laufe auf der reellen Achse zurück bis 1/R .
4. Zum Schluß durchlaufe man im Uhrzeigersinn den Kreis mit Radius 1/R um 0.

5. Man gehe über zum Grenzwert $R \to \infty$.

Im Prinzip ist man am Integral 1. interessiert.
Man beachte nun, daß sich die Integrale 1. und 3. keinesfalls aufheben:
Man hat es mit der komplexen Funktion $z^{p-1} = \exp(\log z)(p-1)$ zu tun, die sich nicht ohne Weiteres auf ganz $\mathbb{C} - \{0\}$ definieren läßt. Üblicherweise entfernt man einen von Null ausgehenden Strahl, hier die positive reelle Achse. Dann läßt sich die holomorphe Funktion $\log z = \log r e^{i\theta} = \log r + i\theta$ mit $0 < \theta < 2\pi$ eindeutig definieren. Will man man sich jetzt doch auf der positiven rellen Achse bewegen wie im Integral 1 und im Integral 3, so muß man, um Unstetigkeiten zu vermeiden, vor dem in 2. stattfindenden Kreisumlauf $\theta = 0$ und nach dem Umlauf $\theta = 2\pi$ setzen.