Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 11
M. Hortmann

Name(n)	*Gruppennummer*

Punkte

1a	b	c	d	e	2	Summe 120%	% bearbeitet

1.

a) Auf $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wurde durch $O_{\bar{\mathbb{C}}} := O_{\mathbb{C}} \cup \{ \bar{\mathbb{C}} - K \mid K \subset \mathbb{C} \text{ kompakt} \}$ eine Topologie erklärt. Man zeige, daß $\bar{\mathbb{C}}$ damit kompakt ist.

Wir haben $\bar{\mathbb{C}}$ kennengelernt als 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit einem aus zwei Karten bestehenden Atlas (U_0, φ_0) , (U_1, φ_1) . Ist $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ offen, so nennt man eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ bzw. $f: U \to \bar{\mathbb{C}}$ holomorph bzw. meromorph, wenn für i=0,1 die Funktionen $f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U \cap U_i) \to \mathbb{C}$ bzw. $f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U \cap U_i) \to \bar{\mathbb{C}}$ holomorph bzw. meromorph sind. Man beachte die Analogie zur Definiton differenzierbarer Abbildungen auf reellen Mannigfaltigkeiten.

b) man zeige, daß jede holomorphe Funktion $f: \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ konstant ist.
Hinweis: man benutze den Satz von Liouville.
Bemerkung: damit ist der Ring der auf ganz $\bar{\mathbb{C}}$ holomorphen Funktionen isomorph zu $\mathbb{C}$.

Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $f(z_0) = 0$, so heißt z_0 Nullstelle n-ter Ordnung von f, wenn es eine holomorphe Funktion g in U gibt mit $g(z_0) \neq 0$ und $f = (z - z_0)^n g$.

Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \bar{\mathbb{C}}$ meromorph, $z_0 \in U$ und $f(z_0) = \infty$, also z_0 eine Polstelle, so wurde in der Vorlesung gezeigt, daß es ein r>0, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und für $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant -n_0$ Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, $a_{-n_0} \neq 0$ gibt, so daß für alle $z \in U_r(z_0)$ gilt: $f(z) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
n_0 ist eindeutig bestimmt und heißt die Polstellenordnung von f in z_0 .

c) Man zeige die Äquivalenz:
f besitzt in z_0 die Polstellenordnung n_0 $\Leftrightarrow$ $1/f$ besitzt in z_0 die Nullstellenordnung n_0 .

Man zeigt leicht, daß der Begriff der Nullstellen- und Polstellenordnung für holomorphe bzw. meromorphe Funktionen in einer 1-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit nicht von der Wahl der Karte abhängt und damit auch für auf offenen Teilmengen einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit definierte holomorphe bzw meromorphe Funktionen sinnvoll ist.

d) Sei p ein komplexes Polynom vom Grad $n>0$. Man fasse p als Abbildung $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ auf, indem man $p(\infty)=\infty$ setzt und zeige, daß damit p eine holomorphe Abbildung [1], aber auch eine meromorphe Funktion auf $\bar{\mathbb{C}}$ ist und als solche in ∞ einen Pol n-ter Ordnung besitzt.

e) Wegen d) läßt sich das Polynom $f(z)=z^2$ als Abbildung $f: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ auffassen. Die stereographische Projektion $\psi: S^2 \to \bar{\mathbb{C}}$ ist ein Diffeomorphismus zwischen den zweidimensionalen reellen Mannigfaltigkeiten S^2 und $\bar{\mathbb{C}}$. Man setze $g := \psi^{-1} \circ f \circ \psi$ und für $p=(x,y,z) \in S^2$ berechne man den Bildpunkt $g(p) \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung:
Eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit M ist ja insbesondere eine zweidimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Ist $p \in U \subset M$ und $\varphi: U \to V \subset C$ eine Karte, $\varphi(p)=q$, so erhält man den Isomorphismus $\varphi_*: T_p \to T_q \simeq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Sind jetzt $\zeta_p, \eta_p \in T_p$, so können wir den Winkel zwischen den Bildvektoren $\varphi_*(\zeta_p), \varphi_*(\eta_p) \in T_q$ mit Hilfe des kanonischen Skalarprodukts im $\mathbb{R}^2$ berechnen. Man zeigt leicht, daß sich der Wert dieses Winkels nicht ändert, wenn man eine andere Karte um den Punkt p benutzt hätte. Dies liegt an der Holomorphie und damit Winkeltreue der Kartenwechselabbildung. Langer Rede kurzer Sinn: Man kann zwischen zwei Tangentialvektoren in einem Punkt einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit einen Winkel definieren, auch ohne die Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet zu haben. Die Cauchy Riemann-Gleichungen sorgen auch dafür, daß die Kartenwechselabbildungen einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit immer eine positive Funktionaldeterminate besitzen, d.h. eine solche Mannigfaltigkeit besitzt eine natürliche Orientierung[2].

Man könnte jetzt nachrechnen, daß die stereographische Projektion $\psi: S^2 \to \bar{\mathbb{C}}$ auch winkelerhaltend und orientierungserhaltend ist, wenn wir von der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Orientierung und Riemannschen Metrik auf der S^2 und der komplexen Mannigfaltigkeitsstruktur von $\bar{\mathbb{C}}$ ausgehen.

2. Man berechne die Laurentreihenentwicklungen der folgenden auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen in den genannten Punkten:

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2(z+2)} \quad \text{im Punkt } z_0=i \ , \quad \frac{z-\sin z}{z^4} \quad \text{im Punkt } z_0=0 \ .$$

1 Bemühen Sie sich selbst um die Definition des Begriffs „holomorphe Abbildung zwischen 1-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten“.

2 Läßt sich in jedem Tangentialraum einer Mannigfaltig ein Winkel zwischen Tangentialvektoren so definieren, daß der Winkel zwischen zwei glatten Vektorfeldern immer eine glatte Funktion ist, so spricht man von einer *konformen Struktur* auf der Mannigfaltigkeit. Eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit trägt also eine natürliche Orientierung und eine natürliche konforme Struktur.