Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 10
M. Hortmann

<table>
<tr><td colspan="7">Name(n)</td><td>Gruppennummer</td></tr>
<tr><td colspan="7"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td colspan="8">Punkte</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2a</td><td>b</td><td>3a</td><td>b</td><td>4</td><td>Summe 120%</td><td>% bearbeitet</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit glattem Rand, $\varphi : \partial G \to \mathbb{C}$ sei stetig.

Man setze für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in U := \mathbb{C} - \partial G$ $\quad f_n(z) := \int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta$ und zeige, daß f_n komplex differenzierbar in U ist und daß $f_n' = n f_{n+1}$.

Hinweis: Induktion über n . Der Induktionsanfang wurde für $z \in G$ in der Vorlesung durchgeführt.

2. Sei G ein Gebiet mit glattem Rand und $f = u + iv$ holomorph in G.
$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist der sogenannte Laplace-Operator. Eine Funktion g , für die $\Delta g = 0$ gilt, nennt man harmonisch (in/auf ihrem Definitionsbereich).

a) Man zeige, daß u, v – also Realteil und Imaginärteil einer in G holomorphen Funktion – harmonisch in G sind. (Folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für f .)

b) Sei f holomorph in einer Umgebung der abgeschlossenen Kugel $B_R(0)$ und wie oben u der Realteil von f . Man beweise die Poissonsche Integralformel

$$z = r e^{is} \text{ mit } r < R \quad \Rightarrow \quad u(z) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(R e^{it})}{R^2 - 2Rr\cos(s-t) + r^2}\, dt \quad .$$

Anleitung: wenn man zunächst die Cauchy-Integralformel $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ hinschreibt, stellt man fest, daß im Integral der Realteil und der Imaginärteil von f vermixt werden. Man setze daher $\tilde{z} = R^2 / \bar{z}$, begründe zunächst daß $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}}\, d\zeta = 0$, und ziehe dies vom Cauchy-Integral ab. Geduldiges Ausrechnen und anschließende Trennung in Realteil und Imaginärteil führt jetzt direkt zur obigen Formel.

3.

a) In Blatt 9 wurde gezeigt, daß man im Zweidimensionalen die Windungszahl einer stetig differenzierbaren Abbildung $f:\ S_r^1 \to \mathbb{C}-\{0\}$ durch $n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta=0$ ausrechnen kann.

Ist f in einer Umgebung der abgeschlossenen Kugel $B_r(0)$ holomorph, so zeige man, daß die Windungszahl gerade die Anzahl der Nullstellen von f in der offenen Kugel $U_r(0)$ angibt.

b) Man erinnere sich an den in der Vorlesung bewiesenen Satz von Rouché:
Sind $f, g:\ S_r^1 \to \mathbb{C}-\{0\}$ glatte Funktionen und ist $\forall z \in S_r^1:\ |f(z)-g(z)| \leqslant |g(z)|$, so ist $n(f)=n(g)$.

Man benutze nun den Satz von Rouché, um zu zeigen, daß alle Nullstellen des Polynoms $z^7-5z^3+12=0$ zwischen den Kreisen mit Radius 1 und Radius 2 um Null liegen.

4. Berechnen Sie das Integral $\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{2z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz$, um die Identität
$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt = 2\pi \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}$ zu erhalten.

Hinweis: Parametrisiert man den Kreis in der üblichen Weise, erhält man sofort die linke Seite der zu beweisenden Gleichung.