Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 9 **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1a	b	c	d	e	f	Summe 120%	% bearbeitet

1. Schränkt man die (n-1) -Form $\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n$ auf die Sphäre S^{n-1} ein, so erhält man die Volumenform auf dieser orientierten Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ [1].

Man betrachte dann die glatte Abbildung $\varphi:\ \mathbb{R}^n-\{0\}\ \to\ \mathbb{R}^n-\{0\}$, $\varphi(x)=\frac{x}{\|x\|}$.

a) Man zeige, daß $\eta=\varphi^*\omega=\frac{1}{\|x\|^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n$.
Bemerkung: Man beginne ganz konkret mit n=1,2,3 .

Die Form η ist a priori geschlossen: ist $i:S^{n-1}\to\mathbb{R}^n-\{0\}$ die Einbettung, so gilt wegen $\operatorname{Im}\varphi=S^{n-1}$ $\varphi=i\circ\varphi$, also ist $\eta=\varphi^*\omega=(i\circ\varphi)^*\omega=\varphi^*(i^*\omega)$ und damit $d\,\eta=d(\varphi^*\omega)=\varphi^*d\,\omega=(i\circ\varphi)^*d\,\omega=\varphi^*(i^*d\,\omega)=\varphi^*\underbrace{d(i^*\omega)}_{=0}=0$, denn die (n-1) Form $i^*\omega$ auf S^{n-1} ist ja aus Dimensionsgründen automatisch geschlossen.

Andererseits muß sich das natürlich auch nachrechnen lassen:

b) Man rechne aus, daß $d\,\eta=0$.
Bemerkung: Auch hier beginne man ganz konkret mit n=1,2,3 .

Für eine Abbildung $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}^n-\{0\}$ wurde in der Vorlesung die Windungszahl definiert als $n(f):=\frac{1}{\operatorname{vol}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}}f^*\eta$.

---

1 Ist $N\subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, so ist die durch $i(x)=x$ gegebene Einbettungsabbildung $i:N\to M$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Ist $\omega\in\mathscr{E}^k(M)$, so ist die Einschränkung von ω auf N formal durch den Pullback $i^*\omega$ gegeben. Meist schreibt man dann weiterhin ω statt $i^*\omega$.

c) Man betrachte den Fall n=2 mit $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Vergleichen Sie η und $\frac{1}{z}dz$. Warum ist

$$n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{df}{f}$$

d) Sei $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}-0$ eine glatte geschlossene Kurve und $c:[0,2\pi]\to\mathbb{C}-\{0\}$ die übliche Parametrisierung der S^1 , also $c(t)=\cos t+i\sin t=\exp it$; $f:S^1\to\mathbb{C}-\{0\}$ sei eine glatte Abbildung und es gelte $\gamma=f\circ c$ [2].

Zeigen Sie, daß $n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}dz$

Bemerkung: wir hatten diesen Ausdruck früher schon einmal als „Windungszahl von γ (um Null)“ bezeichnet.

e) Sei $f:S^1\to\mathbb{C}-\{0\}$ gegeben durch $f(z)=z^k$ für $k\in\mathbb{Z}$. Man zeige, daß $n(f)=k$.

f) Man finde eine Abbildung $f:S^2\to\mathbb{R}^3-\{0\}$ mit $n(f)=2$.

Hinweis: Man baue eine geeignete Abbildung $f:S^1\to\mathbb{C}-\{0\}$ entsprechend aus.

2 Machen Sie sich klar, daß f als Abbildung $S^1\to\mathbb{C}-\{0\}$ schon eindeutig durch γ bestimmt ist. Nur die Glattheit von f im Punkt 1 bedeutet eine Zusatzforderung an γ , die man auch so hätte ausdrücken können: Sei I ein offenes Intervall mit $[0,2\pi]\subset I$ und $\gamma:I\to\mathbb{C}-\{0\}$ eine glatte Abbildung mit $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$, falls $t_2-t_1=2\pi$.