| **Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 8**<br>**M. Hortmann** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Name(n)*** | | | | | | | ***Gruppennummer*** |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| ***Punkte*** | | | | | | | |
| 1a | b | 2a | b | 3a | b | Summe 120% | % bearbeitet |
| | | | | | | | |

**1. Čech-Kohomologie**

Sei $\mathcal{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung der glatten Mannigfaltigkeit $M$.

Für $\alpha_0,\dots,\alpha_k\in A$ setze man $U_{\alpha_0\dots\alpha_k}:=U_{\alpha_0}\cap\dots\cap U_{\alpha_k}$ .

Zu jedem Tupel $\alpha_0,\dots,\alpha_k\in A$ sei nun eine glatte Funktion $f_{\alpha_0\dots\alpha_k}\in\mathscr{E}(U_{\alpha_0\dots\alpha_k})$ so gegeben[1], daß $f_{\alpha_0\dots\alpha_k}\equiv 0$ , sobald ein Index doppelt vorkommt und $f_{\alpha_{\sigma(0)}\dots\alpha_{\sigma(k)}}=\epsilon_\sigma f_{\alpha_0\dots\alpha_k}$ , wenn Indizes permutiert werden. Eine solche Kollektion von Funktionen $f_{\alpha_0\dots\alpha_k}$ nennt man eine (alternierende) Čech-*k*-Kokette mit Koeffizienten in $\mathscr{E}$ , eine einzelne Funktion $f_{\alpha_0\dots\alpha_k}$ eine Komponente der Kokette $(f_{\alpha_0\dots\alpha_k})$ . Die Menge der *k*-Koketten bezeichnet man mit $\check{C}^k(\mathcal{U},\mathscr{E})$ .

Da man *k*-Koketten in natürlicher Weise komponentenweise addieren, mit reellen Skalaren und mit Funktionen in $\mathscr{E}(M)$ multiplizieren kann und dabei die entsprechenden Regeln gelten, ist der Raum $\check{C}^k(\mathcal{U},\mathscr{E})$ in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und ein $\mathscr{E}(M)$ - Modul.

Der Raum $\mathscr{E}(M)$ läßt sich in natürlicher Weise als Unterraum von $\check{C}^0(\mathcal{U},\mathscr{E})$ auffassen, indem man einer Funktion $f\in\mathscr{E}(M)$ für jedes $\alpha\in A$ ihre Einschränkung $f_\alpha$ auf $U_\alpha$ zuordnet.

Man definiert jetzt lineare Abbildungen $\delta^k:\check{C}^k(\mathcal{U},\mathscr{E})\to\check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathscr{E})$ , indem man für $f\in\check{C}^k(\mathcal{U},\mathscr{E})$ und $\alpha_0,\dots,\alpha_{k+1}\in A$ mit $U_{\alpha_0\dots\alpha_{k+1}}\neq\emptyset$ setzt:

$(\delta^k f)_{a_0\dots a_{k+1}}:=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i f_{\alpha_0\dots\widehat{\alpha_i}\dots\alpha_{k+1}}$ . Dabei bedeutet wie üblich die Notation $\alpha_0\dots\widehat{\alpha_i}\dots\alpha_{k+1}$ , daß man den „Index mit Hut“ wegläßt. Die Funktionen auf der rechten Seite sind jedenfalls auf der Menge $U_{\alpha_0\dots\alpha_{k+1}}$ definiert und können daher auf dieser addiert bzw. subtrahiert werden.

a) Man zeige für $k\geqslant 0$ : $\delta^{k+1}\circ\delta^k=0$

Man nennt die Bilder von $\delta^{k-1}$ *k*-Koränder und die Elemente von $\ker\delta^k$ *k*-Kozykel .
Die Aussage in a) bedeutet, daß Koränder Kozykel sind. Man sieht jetzt auch, daß die 0-Kokette $(f_\alpha)$ , die einer globalen Funktion $f\in\mathscr{E}(M)$ zugeordnet ist, ein 0-Kozykel ist, denn es ist ja $(\delta f)_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta$ , und diese Differenz ist Null, wenn $f_\alpha, f_\beta$ die Einschränkungen der global

1 Ist $U_{\alpha_1\dots\alpha_k}=\emptyset$ , so setze man $\mathscr{E}(U_{\alpha_1\dots\alpha_k})=0$ und hat damit auch $f_{\alpha_1\dots\alpha_k}\equiv 0$ .

definierten Funktion $f$ auf die Mengen $U_\alpha, U_\beta$ sind. Umgekehrt sieht man auch sofort, daß ein 0-Kozykel auf diese Weise von einer globalen Funktion herkommt.

Ist die Überdeckung $\mathcal{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von $M$ lokal endlich und die Funktionenfamilie $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine glatte Teilung der Eins auf $M$ mit $\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset U_\alpha$ , so läßt sich dies benutzen um zu zeigen, daß in unserer Situation jeder Čech-Kozykel schon ein Korand ist:

Sei dazu $f\in\check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathscr{E})$ . Man bildet die $k$-Kokette $\theta^k f\in\check{C}^k(\mathcal{U},\mathscr{E})$ durch $(\theta^k f)_{\alpha_0\ldots\alpha_k}:=\sum_{\alpha\in A}\varphi_\alpha f_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_k}$ . Man überlege sich, daß diese Definition sinnvoll ist, und daß damit eine lineare Abbildung $\theta^k:\check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathscr{E})\to\check{C}^k(\mathcal{U},\mathscr{E})$ gegeben ist.

b) Wieso lassen sich die Summanden auf der rechten Seite der Definition von $\theta^k$ als glatte Funktionen auf $U_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$ interpretieren (falls diese Menge nicht leer ist)?
Wieso ist $\delta^k\theta^k f=f$ , falls $\delta^{k+1}f=0$ ? (Dies ist natürlich die eigentliche Aufgabe; damit gilt ja: ist $f$ ein Kozykel, so ist es ein Korand.)

Bemerkung:
Man setzt $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathscr{E}):=\ker\delta^0$ und für $k\geqslant 1$ $\check{H}^k(\mathcal{U},\mathscr{E}):=\ker\delta^k/\operatorname{Im}\delta^{k-1}$ und spricht von der $k$-ten Čechschen Kohomologiegruppe zur Überdeckung $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathscr{E}$ .
Es mag befremdlich erscheinen, daß hier Kozykel immer auch Koränder sind, also für $k\geqslant 1$ $\check{H}^k(\mathcal{U},\mathscr{E})=0$ gilt. Das kommt daher, daß wir als Koketten-Koeffizienten $f_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$ beliebige glatte Funktionen zulassen. Erlaubt man nur konstante Funktionen oder sogar nur konstante Funktionen mit ganzzahligen Werten, sieht die Sache anders aus, und die Kohomologiegruppen verschwinden i.a. nicht mehr und sind charakteristisch für die Mannigfaltigkeit $M$. Die obigen Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathscr{E}$ dienen als Hilfsmittel bei ihrer Berechnung.

## 2. De Rham Kohomologie

Wir kennen den äußeren Ableitungsoperator $d=d^k:\mathscr{E}^k(M)\to\mathscr{E}^{k+1}(M)$ . Wir wissen bereits, daß $d^{k+1}\circ d^k=0$ . Auch in dieser Situation bezeichnen wir $k$-Formen, die durch $d^k$ auf Null abgebildet werden, also geschlossene Formen, als Kozykel und solche, die Bilder von $d^{k-1}$ sind, also exakte Formen, als Koränder. Wegen $d^{k+1}\circ d^k=0$ sind Koränder Kozykel. Wir haben gesehen, daß es Mannigfaltigkeiten gibt, in denen nicht jeder Kozykel ein Korand ist, in denen der Quotientenraum Kozykel/Koränder , also für $k\geqslant 1$ $H^k(M)=\ker d^k/\operatorname{Im} d^{k-1}$ nicht trivial ist.

Ist die Mannigfaltigkeit aber hinreichend einfach, so kann man zeigen, daß für $k\geqslant 1$ $H^k(M)$ , verschwindet, und darum geht es im Folgenden:

Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $V\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen mit $[0,1]\times U\subset V$ ;
$\psi_0,\psi_1: U\to V$ seien gegeben durch $\psi_0(x):=(0,x),\psi_1(x):=(1,x)$ .
a) Man zeige: Ist $\omega\in\mathscr{E}^k(V)$ geschlossen, so ist $\psi_1^*\omega-\psi_0^*\omega$ exakt.

Hinweis: Um die Übersicht zu behalten, bezeichne die Koordinaten auf $U$ mit $x_1,\ldots,x_n$ und die Koordinaten auf $V$ mit $t,x_1,\ldots,x_n$ . Zu konstruieren ist eine Form $\eta\in\mathscr{E}^{k-1}(U)$ mit $d\eta=\psi_1^*\omega-\psi_0^*\omega$ . Schreibt man jetzt alles richtig hin, so sieht man, daß die Koeffizienten von

$\eta$ durch Integrale der Form $\int_0^1 \alpha(t,x)\,dt$ zu definieren sind; man benötigt dann, daß $\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \alpha(t,x)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial \alpha(t,x)}{\partial x_i}\,dt$ , was zu begründen ist.

Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bezüglich einem Punkt $x_0 \in U$ , wenn für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke $[x_0, x]$ in U liegt. Eine konvexe Menge ist also sternförmig bzgl. jedem ihrer Punkte. Insbesondere sind offene Kugeln sternförmig.

b) (Poincaré-Lemma)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig – der Einfachheit halber oBdA bezüglich des Nullpunkts, der in *U* liege. Zeigen Sie, daß jede glatte geschlossene *k*-Form $\rho \in \mathscr{E}^k(U)$ exakt ist.

Hinweis: Setzen Sie $\varphi(t,x) = tx$ . Argumentieren Sie weiter auf der Basis, daß $\omega = \varphi^* \rho$ die Voraussetzungen von a) erfüllt.

3. Sei $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und $x^i = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ ein Monom. $|i| := i_1 + \ldots + i_n$ nennt man den „Grad des Monoms". Ein Polynom, welches eine Linearkombination von Monomen desselben Grades *m* ist, heißt homogen vom Grad *m* ; ist *f* homogen vom Grad *m*, so gilt offenbar $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$ .

Bekanntlich ist $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$ die Volumenform der Sphäre $S^{n-1}$ .
Dabei sind die $x_i$ gerade die homogenen Polynome vom Grad 1.
Man zeige jetzt: Sind die $f_i$ homogen vom Grad *m*, wobei *m* gerade ist, so gilt für $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$ , daß $\int_{S^{n-1}} \omega = 0$ .

a) Ohne Stokes.
b) Mit Stokes.