Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 7 **M. Hortmann**								
Name(n)								***Gruppennummer***
Punkte								
1	2a	b	c	d α	d β	d γ	Summe 140%	% bearbeitet

1. Sei $g: V\times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf dem *n*-dimensionalen reellen Vektorraum *V*.
Durch *g* wird ein Isomorphismus $\Phi: V \to V^*$ definiert, indem man setzt $(\Phi(v))(w) := g(v,w)$.
Anschließend definiert man ein Skalarprodukt *h* auf V^* durch $(\lambda,\mu)\to g(\Phi^{-1}(\lambda),\Phi^{-1}(\mu))$.

Sei $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von V, $v^1,\dots,v^n$ die duale Basis, $g_{ij}=g(v_i,v_j)$ und $h^{ij}=h(v^i,v^j)$.
Wie läßt sich die Matrix (h^{ij}) aus der Matrix (g_{ij}) berechnen?

2. a) Sei *V* ein *n*-dimensionaler reeller Vektoraum mit einem Skalarprodukt *g*, $\omega\in\Lambda^n V^*$, $e_1,\dots,e_n$, $f_1,\dots,f_n$ seien Orthonormalbasen von *V* und $\omega(e_1,\dots,e_n)=1$.
Zeigen Sie, daß $\omega(f_1,\dots,f_n)=\pm 1$.
b) Zeigen Sie: $\omega = z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\wedge z + x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ ist die Volumenform der Sphären $S_r^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$.
c) Berechnen Sie das Volumen der Sphäre S^3 .

d) Sei (U_α) ein Atlas auf einer orientierbaren *n*-dimensionalen Mannigfaltigkeit *M* mit den Karten $\varphi_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha$. Wegen der Orientierbarkeit gibt es eine auf *M* nirgends verschwindende glatte *n*-Form ω . Die Komponetenfunktionen von φ_α nenne man wie üblich $x_\alpha^1,\dots x_\alpha^n$. Auf U_α gilt dann $\omega = f_\alpha \mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n$; dabei ist f_α eine auf U_α nirgends verschwindende glatte Funktion.

α) Begründen Sie, wie man ggf. die Karten so modifizieren kann, daß alle f_α positiv sind.
(Von dieser Situation soll im Folgenden ausgegangen werden.)

Auf $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ setze man $\chi_{\alpha\beta}=\dfrac{f_\alpha}{f_\beta}$, so daß dort gilt: $f_\alpha=\chi_{\alpha\beta}f_\beta$.

β) Man drücke $\chi_{\alpha\beta}$ mit Hilfe der Jacobi-Matrix $\left(\dfrac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\right)$ aus.

Man beachte, daß $\forall\,\alpha,\beta,\gamma$: Auf $U_{\alpha\beta\gamma}=U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ gilt $\chi_{\alpha\gamma}=\chi_{\alpha\beta}\cdot\chi_{\beta\gamma}$ (Kozykelbedingung)

γ) Begründen Sie mit Hilfe der Aufgabenteile α),β) daß $M=\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nicht orientierbar sein kann.

Hinweis: Gehen Sie vom üblichen Atlas $\{U_0,U_1,U_2\}$ auf $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ aus.