Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 6 **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1a	b	c	2	3	4	Summe 120%	% bearbeitet

1. Tensorprodukte

Seien V,W K-Vektorräume , $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis von V, $w_1,\ldots,w_n$ eine Basis von W.
Es wurde definiert $V\otimes W:=\left\{\varphi: V^*\times W^*\to K \;\middle|\; \varphi \text{ bilinear}\right\}$, $(v_i\otimes w_j)(\lambda,\mu):=\lambda(v)\cdot\mu(w)$

a) Man zeige, daß die $v_i\otimes w_j$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$, eine Basis von $V\otimes W$ bilden.

Man definiert $\bigotimes^k V:=\left\{\varphi: \underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{k-\text{mal}}\to K \;\middle|\; \varphi \text{ multilinear}\right\}$ und noch $\bigotimes^0 V:=K$.

$\Lambda^k V$ ist der Unterraum der alternierenden Tensoren, d.h. derjenigen multilinearen Abbildungen, die bei Vertauschung zweier Argumente das Vorzeichen wechseln. Analog enthält der Raum der symmetrischen Tensoren $S^k V$ diejenigen multilinearen Abbildungen, die sich bei Vertauschung zweier Argumente nicht ändern. Z.B. ist ein Skalarprodukt auf V in natürlicher Weise ein Element von $S^2 V^*\subset\bigotimes^2 V^*$.

Man definiert die Abbildungen $S_k, A_k: \bigotimes^k V\to\bigotimes^k V$ durch

$$\left(A_k(\varphi)\right)(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=(1/k!)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon_\sigma\varphi(\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(k)}) \quad .$$

$$\left(S_k(\varphi)\right)(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=(1/k!)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varphi(\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(k)}) \quad .$$

b) Man zeige: $\ker A_k=S^k V$ und $\operatorname{Im} A_k=\Lambda^k V$ (Analoges gilt natürlich für S_k .)

Man merke sich die folgenden Definitionen:
Für $k,l\in\mathbb{N}$ und $\varphi\in\bigotimes^k V$ und $\psi\in\bigotimes^k V$ definiert man $\varphi\otimes\psi\in\bigotimes^{k+l} V$ durch
$(\varphi\otimes\psi)(\lambda_1,\ldots\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_l):=\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\cdot\psi(\mu_1,\ldots,\mu_l)$ und für $\varphi\in\Lambda^k V$ und $\psi\in\Lambda^k V$
setzt man $(\varphi\wedge\psi):=((k+l)!)A_{k+l}(\varphi\otimes\psi)$.

c) Man zeige unter Benutzung der obigen Definitionen für $\varphi,\psi,\chi\in\Lambda^1 V$ die Assoziativität des $\wedge$ - Produkts, d.h. die Gleichung $(\varphi\wedge\psi)\wedge\chi=\varphi\wedge(\psi\wedge\chi)\in\Lambda^3 V$.

2. Betrachten Sie die 2-dimensionale reelle Untermannigfaltigkeit $P \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung $0 = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ gegeben ist. Berechnen Sie die Volumenform auf *P* sowie den Flächeninhalt des über dem Einheitskreis der *x*, *y*-Ebene liegenden Stücks von *P*.

3. Sei $g = \mathrm{d}\,x \otimes \mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y \otimes \mathrm{d}\,y + \mathrm{d}\,z \otimes \mathrm{d}\,z$ der kanonische Metriktensor des $\mathbb{R}^3$. Drücken Sie *g* mit Hilfe der Polarkoordinatenfunktionen r, φ, θ aus.

4. Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$. Ist $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine nicht-singuläre reelle Matrix mit positiver Determinante, so ist durch $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ eine komplex differenzierbare bijektive Abbildung $\varphi_A : H \to H$ gegeben. Man betrachte das durch $g = \dfrac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ gegebene Tensorfeld auf *H*, welches offenbar eine Riemann-Metrik ist, und rechne nach, daß *g* invariant unter der Transformation φ_A ist, d.h. auf *H* gilt: $\varphi_A^* g = g$.