| **Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 5**<br>**M. Hortmann** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Name(n)*** | | | | | | | | ***Gruppennummer*** |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| ***Punkte*** | | | | | | | | |
| 1a | b | c | d | 2a | b | c | Summe 140% | % bearbeitet |
| | | | | | | | | |

1. Sei $M$ ein topologischer Raum, $L \subset M$ . $\bar{L}$ sei der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von $M$, die $L$ enthalten. Offenbar ist $\bar{L}$ selbst abgeschlossen. Man nennt $\bar{L}$ die abgeschlossene Hülle von $L$.

Man nennt $L$ relativ kompakt in $M$, wenn $\bar{L}$ kompakt ist, und schreibt dann $L \subset\subset M$ .

Sei $U$ eine echte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ .

a) Für $x \in U$ setze man $f(x) := \inf\{d(x, y) | y \notin U\}$ und zeige, daß $f$ stetig auf $U$ ist.

b) Man zeige (ggf. mit Hilfe der Funktion in a) ), daß es eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Teilmengen von $U$ gibt, die $U$ ausschöpfen, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$ und für die gilt $U_n \subset\subset U_{n+1}$ .

c) Man zeige: $U$ ist parakompakt.

d) Wir haben seinerzeit gezeigt, daß die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \end{cases}$

unendlich oft differenzierbar ist. Betrachtet man die offene Kugel $U_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ und setzt für $y \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_{x,r}(y) := f\left(r^2 - \|y-x\|^2\right)$ , so ist damit auch diese Funktion beliebig oft differenzierbar und es gilt: $\varphi_{x,r} > 0$ in $U_r(x)$ und $\varphi_{x,r} \equiv 0$ außerhalb $U_r(x)$ .

Seien nun $U_1, \ldots, U_m$ offene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ und $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ .

Man gebe konkret unendlich oft differenzierbare auf ganz $U$ definierte Funktionen $\psi_i$ an, die außerhalb $U_i$ verschwinden, und für die gilt: $\forall x \in U: \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) = 1$ .

2. Parameterabhängige Integrale

Sei $\mu$ ein Maß auf $X$, $I=[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ , $f: X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Man setze $f_t(x) := f(x, t)$ . Für alle $t \in I$ seien die Funktionen $f_t$ integrierbar, so daß die Definition $F(t) := \int_X f(x, t) \, d\mu(x)$ sinnvoll ist.

a) Für alle $x \in X$ sei die Funktion $f_x(t) := f(x,t)$ stetig in $t$, und es existiere eine integrierbare Funktion $g$ auf $X$, so daß $\forall x, t\colon |f(x,t)| \leq g(x)$ .
Man folgere mit Hilfe des Satzes über die beschränkte Konvergenz, daß $F$ stetig ist.

b) Für alle $x,t$ existiere der Grenzwert $\frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}$ , und es gebe eine integrierbare Funktion $g$ auf $X$, so daß $\forall x, t\colon \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t)\right| \leq g(x)$ .
Man folgere mit Hilfe des Satzes über die beschränkte Konvergenz, daß $F$ in $]a,b[$ differenzierbar ist und daß $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t)\, d\mu(x)$ .

c) Faltungsintegral
Mit der Technik aus 1d) läßt sich leicht eine auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktion $\delta_n$ konstruieren, konstruieren, die in $]-1/n,1/n[$ positiv ist, außerhalb dieses Intervalls verschwindet, und für die gilt $\int_{\mathbb{R}} \delta_n\, d\lambda = 1$ .

Sei jetzt die Funktion $f$ identisch 1 auf dem Intervall [3,4] und identisch 0 außerhalb.
Diese Funktion ist natürlich in den Randpunkten nicht stetig.

Setze $f_n(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\delta_n(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$ . (Das kann man natürlich auch als Riemann-Integral schreiben, wenn man unbedingt will.)

Man zeige: $f_n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar (vielleicht schaffen Sie sogar unendlich oft differenzierbar?) , und $f_n$ verschwindet außerhalb $]3-1/n\ ,\ 4+1/n[$ und ist identisch 1 auf $[3+1/n, 4-1/n]$ .

Bemerkung: Die Differenzierbarkeit zeigt man mit 2b) . Die Approximation von $f$ durch $f_n$ sieht man anschaulich, wenn man sich für verschiedene feste $x$ das Integral konkret anschaut. Mit dieser Technik kann man dann nicht nur die oben gegebene, sondern beliebige meßbare Funktionen durch differenzierbare Funktionen approximieren.

Zusatz: (freiwillig) Versuchen Sie sich an einer $n$-dimensionalen Verallgemeinerung. Gehen Sie aus von einer Funktion, die gleich 1 auf einer offenen Menge ist und gleich 0 außerhalb und approximieren Sie sie wie oben durch eine differenzierbare Funktion.