Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 4 **M. Hortmann**					
Name(n)					***Gruppennummer***
Punkte					
1a	b	2	3	Summe	% bearbeitet

1. a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Man zeige, daß dann f gleichmäßig stetig ist, d.h. $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in K: \; \|x - y\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

b) Ist $\gamma : [a, b] \to G$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so wurde definiert $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$, wobei $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ ein Produkt in $\mathbb{C}$ ist. Ein Polygonzug $z_0, \ldots, z_n$ auf γ sei gegeben durch eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ mit $z_i = \gamma(t_i)$.
Ein solcher Polygonzug stellt in natürlicher Weise selbst einen stückweise stetig differenzierbaren Weg η dar, der für eine hinreichend feine Zerlegung auch in G liegt, also $\eta : [a, b] \to G$, wobei man für $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$ $\quad \eta(t) := \gamma(t_{i-1}) + (t - t_{i-1})(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$ setzt.

Man zeige: Ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es einen Polygonzug $z_0, \ldots, z_n$ auf γ , so daß $\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\eta f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \epsilon$.

Mit anderen Worten: ein Wegintegral läßt sich durch Integrale über Polygonzüge approximieren.

2. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig* bezüglich einem Punkt $z_0 \in G$, wenn für jedes $z \in G$ die gerade Verbindungsstrecke $[z_0, z]$ in G liegt. (Offenbar sind konvexe Gebiete sternförmig bezüglich jedem ihrer Punkte.)

Man zeige: Ist f in G komplex differenzierbar, so ist $F(z) := \int_{[z_0, z]} f(z)\,\mathrm{d}z$ eine Stammfunktion von f.

3. Sei f im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Laut Cauchy-Formel gilt $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, wenn γ den Rand des Kreises $U_r(z_0) \subset G$ parametrisiert und $z \in U_r(z_0)$. Man zeige, daß dann $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$.