Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 3 **M. Hortmann**									
Name(n)									***Gruppennummer***
Punkte									
1a	b	c	d	e	2a	b	c	Summe	% bearbeitet

1. Topologie im Zusammenhang der Integralsätze für komplex differenzierbare Funktionen:

Eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums *M*, die gleichzeitig offen und abgeschlossen in *M* ist, heißt Zusammenhangskomponente von *M*.

a) Sind M_1, M_2 verschiedene Zusammenhangskomponenten von *M*, so sind M_1, M_2 disjunkt.

b) Jeder Punkt von *M* liegt in genau einer Zusammenhangskomponente von *M*.

c) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so besitzt $M := \mathbb{R}^n - K$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangsk.

d) Man berechne alle Zshk. des Komplements von $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leqslant |z| \leqslant 5 \text{ und } |z-3| \geqslant 1 \text{ und } |z+3| \geqslant 1\}$.

Definitionen:
Zwei stetige Wege $c_0 : [0,1] \to M$, $c_1 : [0,1] \to M$ heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung $c : [0,1] \times [0,1] \to M$ gibt mit $\forall t \in [0,1] : c(t,0) = c_0(t),\ c(t,1) = c_1(t)$.
Ein geschlossener Weg $c_0 : [0,1] \to M$ in *M* heißt zusammenziehbar, wenn es ein $x_0 \in M$ und eine stetige Abbildung $c : [0,1] \times [0,1] \to M$ gibt mit $\forall t \in [0,1] : c(t,0) = c_0(t),\ c(t,1) = x_0$.
Unter einem Gebiet versteht man eine offene zusammenhängende Menge. Man nennt ein Gebiet ***einfach zusammenhängend***, wenn jede stetige geschlossene Kurve darin zusammenziehbar ist.

e) Man zeige, daß $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, $\mathbb{C} - \{0\}$ dagegen zusammenhängend aber nicht einfach zusammenhängend.

2 a) Ist $\omega = \bar{z}\,\mathrm{d}z$ geschlossen? Sei γ der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis. Berechne $\int_\gamma \omega$.

b) Sei $a \in \mathbb{C}$. Man betrachte 1-Formen in $\mathbb{C} - \{a\}$: Warum ist $\dfrac{\mathrm{d}z}{z-a}$ geschlossen, aber nicht exakt? Warum ist $\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}$ exakt?

c) Man berechne $\int_\gamma (z^2 + 2i\,z)\,\mathrm{d}z$, wobei γ das Wegsegment mit Anfangspunkt (1,1) und Endpunkt (2,3) entlang der durch $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ gegebenen Kurve ist.