Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 2 **M. Hortmann**								
Name(n)								***Gruppennummer***
Punkte								
1a	b	c	2a	b	c	d	Summe	% bearbeitet

1. Rechnen mit Potenzreihen

Gegeben sei die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

a) Sei $0<S:=\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Man zeige: Ist $z\in\mathbb{C}, |z|>\frac{1}{S}$, so divergiert die Reihe.

b) Die Potenzreihe konvergiere für alle z innerhalb eines offenen Kreises $U_r(0)$. Die Funktion $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist innerhalb dieses Kreises stetig. Dies wurde seinerzeit mit gleichmäßiger Konvergenz der durch Polynome gegebenen Partialsummen auf abgeschlossenen Teilkreisen begründet und folgt natürlich auch aus der in der Vorlesung gezeigten komplexen Differenzierbarkeit. Man ahme letzteren Beweis nach, indem man durch direktes Rechnen mit der Potenzreihe zeigt: Ist $z_0\in U_r(0)$, so gilt $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Anleitung: Ist z_0 gegeben, so gibt es ein $\rho<r$ mit $|z_0|<\rho$. Für $|z|<\rho$ finde man eine Konstante $M>0$, so daß $|f(z)-f(z_0)|\leqslant M|z-z_0|$. Daraus folgt dann die Behauptung.

c) Die Funktion $f(z)=\frac{2z+3}{z+1}$ ist in $\mathbb{C}-\{-1\}$ komplex differenzierbar. Man finde eine Potenzreihenentwicklung von f in $z_0=1$. Welchen Konvergenzradius hat die Reihe?

2. Linear gebrochene Abbildungen

Seien $a,b,c,d\in\mathbb{C}, ad-bc\neq 0$ und $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. Wir betrachten den Fall $c\neq 0$.

Setzen wir $z_0=-\frac{d}{c}$, so ist f in $\mathbb{C}-\{z_0\}$ offenbar komplex differenzierbar.

a) Man zeige, daß f Kreislinien und Geraden auf Kreislinien oder Geraden abbildet.

b) Man zeige, daß es genau eine Kreislinie oder eine Gerade gibt, der/die durch f auf sich selbst abgebildet wird.

c) Ist $a=\bar{d}$ und $c=\bar{b}$, so ist $ad-bc\in\mathbb{R}$. Man lasse jetzt auch $c=0$ zu und zeige: Ist $ad-bc>0$, so wird der abgeschlossene Einheitskreis durch f bijektiv auf sich selbst abgebildet. (Wieso liegt der abgeschlossene Einheitskreis im Definitionsgebiet von f ?)

d) Man zeige, daß die Menge der Abbildungen des abgeschlossenen Einheitskreises, die in c) betrachtet wird, eine Gruppe bildet.