Analysis IV SS08, Aufgabenblatt 1 **M. Hortmann**									
Name(n)									***Gruppennummer***
Punkte									
1a	b	c	d	2a	b	3	4	Summe	% bearbeitet

1. Rechnen mit komplexen Zahlen

Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit $0{,}1 \in M$. Wir definieren rekursiv die Menge $K_M \subset \mathbb{R}$ durch

$$x \in K_M : \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M \text{ oder} \\ x = a+b \text{ oder } x = a-b \text{ oder } x = ab \text{ oder } x = \frac{a}{b}(b \neq 0) \text{, wobei } a, b \in K_M \text{ oder} \\ x = \sqrt{a} \text{ für } a \in K_M \text{ und } a > 0 \end{cases},$$

und setzen $K_M^{\mathbb{C}} := \{a+ib \mid a, b \in K_M\}$.

Offenbar ist $\mathbb{Q} \subset K_M$, und z.B. $\sqrt{3+\sqrt{5}} \in K_M$ und $i \in K_M^{\mathbb{C}}$.

Man überlegt sich unschwer, daß $K_M^{\mathbb{C}}$ genau die Punkte enthält, die sich mit Zirkel und Lineal aus der Menge $M \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ konstruieren lassen. Dies wird aber im Folgenden nicht benutzt.

a) Sei $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Man zeige: es gibt ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$ und $w \in K_{\{0,\,1,a,b\}}^{\mathbb{C}}$.
(Man gehe davon aus, daß positive reelle Zahlen eine positive Quadratwurzel besitzen.)

b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ und $z^n \neq 1$. Man zeige, daß $\sum_{i=0}^{n-1} z^i = 0$.

Im folgenden sei $M = \{0,1\}$:

c) Man finde ein $z \in K_M^{\mathbb{C}}$, $z \neq 1$ mit $z^3 = 1$.

d) Man finde ein $z \in K_M^{\mathbb{C}}$, $z \neq 1$ mit $z^5 = 1$.

Hinweise: c) ist trivial; man löse z.B. die durch b) gegebene quadratische Gleichung.
d) Wegen b) gilt $1+z+z^2+z^3+z^4=0$. Außerdem ist z.B. $z^4 = z^{-1} = \bar{z}$. Man setze $w = z+z^{-1}$ und berechne w^2. Benutzt man die vorigen Gleichungen, so findet man, daß *w* eine quadratische Gleichung erfüllt. Nach Lösung dieser Gleichung ist w bekannt, und es ergibt sich eine quadratische Gleichung für *z*, die dann ebenfalls lösbar ist. Insgesamt hat man also konkrete Formeln für den Realteil und den Imaginärteil von *z*.

Bemerkung: Man kann durch sukzessives Lösen quadratischer Gleichungen auch Formeln für von 1 verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit *n*=17, *n*=257 und *n*=65537 finden. Wie man die richtigen Gleichungen dabei aufstellt, ist Thema der Galoistheorie. Hat man die Gleichungen erst einmal, so kann man alles explizit nachrechnen.

2. Man setze $f(x,y) := \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} , 0 \right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ und zeige, daß die dadurch definierte Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

a) überall stetig ist.
b) überall partiell differenzierbar ist, jedoch im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Bemerkung: f erfüllt im Nullpunkt trivialerweise die Cauchy-Riemann Gleichungen, ist dort aber nicht komplex differenzierbar, denn f ist dort ja nicht reell differenzierbar.

3. Sei $f(z) = z^3 \bar{z}^2$. Man berechne $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.
Ist f in irgendwelchen Punkten komplex differenzierbar?

4. Sei $z = x + iy$ und $f(z) = x^3 y^2 + i\, x^2 y^3$.
Man bestimme die Menge der Punkte in $\mathbb{C}$, in denen f komplex differenzierbar ist.