Tangentialraum und Vektorfelder

Funktionskeime

Im Folgenden sei der Einfachheit unter „differenzierbar“ immer „beliebig oft differenzierbar“ zu verstehen – man sagt auch *glatt*. Wir gehen aus von einer glatten *n*-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Ist $U \subset M$ offen, so sei $\mathcal{D}(U)$ der Raum der auf *U* glatten Funktionen. Man möchte für $p \in M$ Funktionen, die in einer offenen Umgebung von *p* definiert sind, identifizieren, wenn sie in einer ggf. kleineren offenen Umgebung übereinstimmen, d.h. man erklärt sie dann für äquivalent und betrachtet die Äquivalenzklassen und nennt diese *Funktionskeime in p.* Sind *f* und *g* in diesem Sinne äquivalent, so stimmen ihre Funktionswerte in *p* überein, sind *f* und *g* sogar glatt, so stimmen auch ihre Ableitungen in *p* überein; man kann demnach bei einem Keim einer glatten Funktion von einem Funktionswert und partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung in *p* sprechen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}_p$ [1] die Menge der glatten Funktionskeime in p. $\mathcal{D}_p$ ist in natürlicher Weise eine $\mathbb{R}$ -Algebra. Den von einer Funktion f repräsentierten Funktionskeim in *p* bezeichnen wir f_p .

Hinter der Konstruktion der Funktionskeime steckt eine universelle algebraisch-kategorielle Konstruktion, der sogenannte *Induktive Limes.* Wer sich dazu informiert, sollte auch gleich den dualen Begriff *Projektiver Limes* anschauen.

Es ist vielleicht einfacher, erst einmal alle folgenden Begriffe ganz abstrakt durchzuziehen. Anschließend muß man sich natürlich die Bedeutung klarmachen und Beispiele behandeln.

Derivation

Eine lineare Abbildung $X_p : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$ nennt man *Derivation in p* , wenn für $f_p, g_p \in \mathcal{D}_p$ gilt:
$X_p(f_p \cdot g_p) = f_p(0) X_p(g_p) + g_p(0) X_p(f_p)$.

Tangentialraum

Derivationen in *p* kann man in natürlicher Weise addieren und mit Skalaren multiplizieren, sie bilden also einen Vektorraum, bezeichnet mit T_p oder $T_p M$, den sogenannten *Tangentialraum von M in p*. Ist $U \subset M$ offen, so definiert man $TU := \bigcup_{p \in U} T_p$ als den *Tangentialraum von U* ; man spricht auch vom *Tangentialbündel* . T_p nennt man auch die *Faser des Tangentialbündels in p* und *U* den Basisraum von *TU.* Die Abbildung $\pi : TU \to U$, $X_p \to p$ nennt man die kanonische Projektion. Ein Element von T_p nennt man auch einen *Vektor in p* , manchmal einen Vektor über p .

Vektorfelder

Ist $U \subset M$ offen, so nennt man eine Abbildung $X : U \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$ ein Vektorfeld über U . Es ist dann also $X_p = X(p) \in T_p$. Ist $f \in \mathcal{D}(U)$, so ist $X_p(f_p) \in \mathbb{R}$. Man kann also die Zuordnung $p \to X_p(f_p)$ als Funktion auf *U* auffassen und nennt diese Xf oder $X(f)$, manchmal auch $L_X f$ oder $L_X(f)$. Man nennt das Vektorfeld *X glatt*, wenn für alle $f \in \mathcal{D}(U)$ die Funktion Xf ebenfalls glatt ist.

Offenbar erbt ein Vektorfeld *X* über *U* die Produktregel von den Derivationen X_p , d.h. es gilt $\forall f, g \in \mathcal{D}(U)$: $X(f \cdot g) = f \cdot (Xg) + g \cdot Xf$. Damit läßt sich *X* auffassen als Derivation $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$.

1 In der Vorlesung wurden die Notationen C_p^k bzw. C_p^∞ benutzt. Ich entscheide mich hier für das typographisch einfachere $\mathcal{D}_p$.

Die Menge der glatten Vektorfelder auf U bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(U)$. Offenbar ist $\mathfrak{X}(U)$ in natürlicher Weise ein Vektorraum,und sogar ein $\mathcal{D}(U)$ - Modul, d.h. für $f\in\mathcal{D}(U)$ und $X\in\mathfrak{X}(U)$ hat man ein natürliches Produkt $fX\in\mathfrak{X}(U)$,wobei $(fX)(p):=f(p)\cdot X_p$.

Kotangentialraum
Zu jedem Tangentialraum T_p kann man den Dualraum T_p^* bilden, den sogenannten *Kotantial-raum in p* . Zu einer offenen Menge $U\subset M$ bildet man die Menge $T^*U:=\bigcup_{p\in U}T_p^*$, den *Kotangentialraum* bzw. das *Kotangentialbündel über U* . Auch hier bildet man wieder die Projek-tionsabbildung $\pi:T^*U\rightarrow U$, die jedem Kotangentialvektor $\omega_p\in T_p^*$ seinen Fußpunkt/Basis-punkt p zuordnet.

Ein *Kovektorfeld auf U* ist dann natürlich eine Abbildung $\omega:U\rightarrow T^*U$, für die wieder $\pi\circ\omega=\mathrm{id}_U$ gilt. Ist gleichzeitig ein Vektorfeld $X\in\mathfrak{X}(U)$ gegeben, so kann man für jedes $p\in U$ die Zahl $\omega_p(X_p)$ bilden, denn das Element $\omega_p\in T_p^*$ ist ja definitionsgemäß eine Abbildung $\omega_p:T_p\rightarrow\mathbb{R}$; man erhält also eine Funktion auf U, die man auch $\omega(X)$ nennt. Oft benutzt man auch die Schreibweise $<\omega_p,X_p>:=\omega_p(X_p)$, weil man die Anwendung eines Dualraumvektors auf einen Vektor als Produkt interpretieren möchte, und man schreibt dementsprechend auch $<\omega,X>:=\omega(X)$. Ist $<\omega,X>=\omega(X)$ für beliebiges $X\in\mathfrak{X}(U)$ glatt, so nennt man auch ω glatt. Die Menge der glatten Kovektorfelder auf U bezeichnet man mit $\mathscr{E}(U)$. Statt von einem Kovektorfeld spricht man auch von einer *Differentialform* oder *1-Form.* Genau wie bei den Vektorfeldern kann man auch hier zu einer Funktion $f\in\mathcal{D}(U)$ und einer 1-Form $\omega\in\mathscr{E}(U)$ das Produkt $f\omega\in\mathscr{E}(U)$ bilden.

Der Ableitungsoperator d
Ist $f\in\mathcal{D}(U)$, so kann man in natürlicher Weise eine 1-Form $\omega=df\in\mathscr{E}(U)$ definieren, indem man für jedes $p\in U$ und jedes $X_p\in T_p$ setzt: $\omega_p(X_p):=X_p(f_p)$. Man rechnet sofort mit Hilfe der Derivationseigenschaft der Vektorfelder nach, daß die Abbildung $\mathrm{d}:\mathcal{D}(U)\rightarrow\mathscr{E}(U)$ eine Derivation ist, daß also $\mathrm{d}(fg)=f\ \mathrm{d}g+g\ \mathrm{d}f$

wird fortgesetzt.