Maßtheorie (Version 0.3)

1. σ-Algebra

Ist M eine Menge, so nennt man ein System von Teilmengen $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(M)$ eine σ-Algebra (auf M), wenn gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- $A \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathfrak{A}$
- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Menge in $\mathfrak{A}$, so ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}$ ist damit stabil unter Differenzbildungen, endlichen und abzählbaren Durchschnitts- und Vereinigungsbildungen. Man beachte die Ähnlichkeiten und Unterschiede zur Definition einer Topologie, ebenso wie die Trivialbeispiele $\mathcal{P}(M)$ und $\{\emptyset, M\}$ für eine σ-Algebra.

Der Durchschnitt einer Familie von σ-Algebren auf M ist ebenfalls eine σ-Algebra auf M.
Ist also $\mathscr{E} \subset \mathcal{P}(M)$, so ist

$$\bigcap_{\substack{\mathscr{E}\subset\mathcal{B} \\ \mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{B} = \left\{ B \subset M \;\middle|\; \text{für alle } \sigma\text{-Algebren } \mathcal{B} \text{ mit } \mathscr{E}\subset\mathcal{B} \text{ gilt } B\in\mathcal{B} \right\}$$

die kleinste σ-Algebra auf M, welche $\mathscr{E}$ enthält. Man spricht auch von der von $\mathscr{E}$ erzeugten σ-Algebra. Die obige Durchschnittsbildung ist übrigens nicht leer, denn es gilt ja mindestens $\mathscr{E} \subset \mathcal{P}(M)$.

Hat man eine Topologie $\mathcal{O}$ auf M, so nennt man die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra *Borelsch.* Die Borelsche σ-Algebra enthält also alle offenen und auch abgeschlossenen Mengen. Die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ wird offenbar schon von den halboffenen Intervallen der Form $]a,b]$ oder auch von denen der Form $[a,b[$ erzeugt, denn jede offene Menge in $\mathbb{R}$ läßt sich als abzählbare Vereinigung solcher Intervalle darstellen.

Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf M, so nennt man das Paar $(M, \mathfrak{A})$ einen *meßbaren Raum.*
Elemente der σ-Algebra nennt man auch *meßbare Mengen*.

Relativalgebra

Man erinnere sich:
Ist $(M, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $N \subset M$, so definiert man die Relativtopologie auf N durch $\mathcal{O}_N := \{ U \cap N \mid U \in \mathcal{O} \}$.

Völlig analog:
Ist $(M, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $N \subset M$, so definiert man die *Relativalgebra* auf N durch $\mathfrak{A}_N := \{ U \cap N \mid U \in \mathfrak{A} \}$

Produktalgebra

Sind $(M, \mathfrak{A}), (N, \mathcal{B})$ meßbare Räume , so nennt man die von $\{ A\times B \mid A\in\mathfrak{A}, B\in\mathcal{B} \}$ erzeugte σ-Algebra auf $M \times N$ ***Produktalgebra*** und bezeichnet sie mit $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}$.

Wir kennen die analoge Konstruktion einer Produkttopologie: die Produkte der offenen Mengen bilden deren Basis, d.h. die offenen Mengen der Produkttopologie lassen sich als Vereinigungen offener Rechtecke schreiben. Sind *M,N* topologische Räume und $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{B}$ die zugehörigen Borel-Algebren, so ist $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}$ nur dann die Borel-Algebra der Produkttopologie, wenn sich jede offene Menge als abzählbare Vereinigung offener Rechtecke schreiben läßt. Dies ist sicher dann der Fall, wenn die Topologien auf *M* und *N* eine abzählbare Basis besitzen. Wir mögen uns dunkel erinnern, daß solche topologischen Räume definitionsgemäß dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügen, wie insbesondere der $\mathbb{R}^n$ mit seiner gewöhnlichen Topologie.

2. Meßbare Abbildungen und meßbare Funktionen

Man erinnere sich an die charakteristische Eigenschaft stetiger Abbildungen zwischen topologischen Räumen: Urbilder offener Mengen sind offen.

Entsprechend nennt man eine *Abbildung* zwischen meßbaren Räumen *meßbar*, wenn Urbilder meßbarer Mengen meßbar sind.

Sind $(M, \mathfrak{A}), (N, \mathcal{B})$ meßbare Räume und wird die σ-Algebra $\mathcal{B}$ von der Menge $\mathcal{E}$ erzeugt, so genügt für die Meßbarkeit einer Abbildung $f: M \to N$ bereits die Meßbarkeit der Urbilder der Elemente von $\mathcal{E}$.

Zum Beweis definiere man zunächst die Menge $\left\{A \subset N \middle| f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}\right\}$. Es ist trivial zu zeigen, daß diese Menge eine σ-Algebra auf *N* ist. Lt. Voraussetzung enthält diese σ-Algebra die Menge $\mathcal{E}$ und daher die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$, die ja definitionsgemäß die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält. Also liegen die Urbilder beliebiger Elemente von $\mathcal{B}$ in $\mathfrak{A}$, sind also meßbar.

Betrachtet man auf $\mathbb{R}$ die Borelsche σ-Algebra, so ist demgemäß $f: M \to \mathbb{R}$ schon meßbar, wenn nur Urbilder offener Mengen meßbar sind, oder wenn nur Urbilder abgeschlossener Mengen meßbar sind, oder sogar wenn nur Urbilder von Intervallen der Form $]a,b]$ meßbar sind, denn jedes dieser Mengensysteme erzeugt ja die Borelsche σ-Algebra.

Eine komplexwertige Funktion ist genau dann meßbar, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil meßbar sind.

Kanonische Projektionen und kanonische Injektionen sind meßbar:
Daß die Projektionen $M \times N \to M$ und $M \times N \to N$ ebenso wie die Injektione**n** $M \to M \times N, \ x \to (x, y_0)$, $N \to M \times N, \ y \to (x_0, y)$ meßbar sind, folgt sofort aus der Definition der Produktalgebra.

Stetige Abbildungen sind meßbar:
Sind *M,N* topologische Räume und $f: M \to N$ stetig, so sind Urbilder offener Mengen offen, also Elementeder Borelalgebra von *M*. Nach obigen Bemerkungen sind dann Urbilder beliebiger Borelmengen in *N* auch Borelmengen in *M*, d.h. *f* ist meßbar bezüglich der Borelalgebren von *M,N.*
Hintereinanderschaltungen meßbarer Abbildungen sind meßbar:
Sind $(M, \mathfrak{A}), (N, \mathcal{B}), (K, C)$ meßbare Räume und $f: M \to N$, $g: N \to K$ meßbar, so ist auch $g \circ f: M \to K$ meßbar, denn für $C \in C$ ist $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \mathfrak{A}$.

Summen und Produkte meßbarer Funktionen sind meßbar:

$(M, \mathfrak{A})$ sei ein meßbarer Raum $f, g: M \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen. Dann ist $(f, g): M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \to (f(x), g(x))$ meßbar. Sind nämlich *I,J* offene Intervalle in $\mathbb{R}$, so ist $(f, g)^{-1}(I \times J) = f^{-1}(I) \cap g^{-1}(J)$, Urbilder eines Erzeugendensystems der Produktalgebra auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind also meßbar und damit auch die Abbildung *(f,g)*.

Die Abbildungen Plus, Mal: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, also meßbar .

Damit sind $f + g := \text{Plus} \circ (f, g)$ und $f \cdot g := \text{Mal} \circ (f, g)$ Verknüpfungen meßbarer Abbildungen, also meßbar.

Entsprechendes gilt natürlich für Differenzen, skalare Vielfache und Quotienenbildungen, solange man nicht durch Null dividiert, ebenso wie für Funktionen, deren Bildbereich $\overline{\mathbb{R}}$ ist, solange man darauf achtet, daß man Operationen wie $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ausschließt.

Suprema, Infinima, Limes Superior, Limes Inferior meßbarer Funktionen sind meßbar:

$(M, \mathfrak{A})$ sei ein meßbarer Raum, $f_n: M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge meßbarer Funktionen.
Man definiert $(\sup f_n)(x) := \sup(f_n(x))$; entsprechend $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$.

Dabei erinnere man sich, daß der Limes Superior einer Folge reeller Zahlen (a_n) als größter Häufungspunkt der Folge definiert ist. Betrachtet man eine Folge (a_n) in $\overline{\mathbb{R}}$, so braucht man sich um dessen Existenz keine Sorge zu machen, und es gilt $\limsup a_n = \inf_n \left(\sup_{k \leq n} a_k\right)$, wobei $b_n = \sup_{k \leq n} a_k$ offenbar eine monoton fallende Folge ist.

Um die Meßbarkeit von $g := \sup f_n$ zu zeigen, genügt es lt. obigen Bemerkungen, die Meßbarkeit der Mengen $g^{-1}([a, \infty])$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ zu zeigen, denn die Intervalle $[a, \infty]$ erzeugen ja die Borelalgebra auf $\overline{\mathbb{R}}$. (Z.B. ist $[a, b[= [a, \infty] - [b, \infty]$ und $]a, b[= \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b[$, wobei $\frac{1}{n_0} < b - a$). Nun prüft man sofort nach, und dies wurde in der Vorlesung auch durchgeführt, daß $g^{-1}([a, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([a, \infty])$, denn jedes Element der linken Menge ist auch Element der rechten und umgekehrt. Als abzählbare Vereinigung meßbarer Mengen ist $g^{-1}([a, \infty])$ aber selbst meßbar, was zu zeigen war.

Entsprechend ist $\inf f_n$ meßbar, und damit auch $\limsup f_n$, $\liminf f_n$.

Ähnlich zeigt man, daß mit $f, g: M \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ meßbar sind , ebenso wie $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := -\min\{f, 0\}$. Mit diesen Definitionen sind $f^+, f^- \geq 0$, und es gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$, damit ist $|f|$ meßbar, ebenso wie natürlich der Absolutbetrag einer komplexwertigen meßbaren Funktion.

Ist $A \subset M$ meßbar, so nennt man eine nur auf *A* definierte Funktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ oder in $\mathbb{C}$ meßbar, wenn Urbilder meßbarer Mengen meßbare Teilmengen von *A* sind. Nun kann man eine auf *A* definierte Funktion auf ganz *M* fortsetzen, indem man ihr auf *M-A* den Wert 0 zuordnet. Die so fortgesetzte Funktion ist trivialerweise auch meßbar auf *M* .

Treppenfunktionen

Ist $A \subset M$, so nennen wir die durch $\chi_A(x)=\begin{cases} 1 & \text{für} \quad x\in A \\ 0 & \text{für} \quad x\notin A \end{cases}$ definierte Funktion die ***charakteristische Funktion von A .*** Offenbar ist χ_A genau dann meßbar, wenn A meßbar ist. Ist $A=\emptyset$, so ist χ_A konstant gleich Null, nimmt also nur diesen einen Wert an, ist $A=M$, so ist χ_A konstant gleich 1, nimmt also ebenfalls nur diesen einen Wert an, ansonsten nimmt χ_A die Werte 0 und 1 an.

Wir wollen im folgenden nur **positive** Treppenfunktionen betrachten und unter einer solchen eine meßbare Funktion $M \to [0,\infty]$ verstehen, die nur endlich viele Werte $\alpha_1,\ldots\alpha_n$ annimmt. Wir reservieren die Variable *s* für Treppenfunktionen.

Sind $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in[0,\infty]$ die verschiedenen Werte einer meßbaren Treppenfunktion *s* ohne den eventuell ebenfalls vorhandenen Wert Null, so sind die Mengen $A_i:=s^{-1}(\{\alpha_i\})$ jedenfalls meßbar, die A_i sind paarweise disjunkt, und es gilt offenbar $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$!

Der folgende Satz ist elementar, aber fundamental für die Integrationstheorie:

Satz: Ist $f: M\to\mathbb{R}_+$ meßbar, so gibt es eine monoton steigende Folge s_n von Treppenfunktionen mit $s_n\leqslant f$ und $\sup s_n=\lim_{n\to\infty} s_n=f$.

Die folgende Konstruktion wurde schon in der Vorlesung durchgeführt:
Für $n\in\mathbb{N}$ und $1\leqslant i\leqslant n2^n$ setze man $E_n^i:=f^{-1}\left(\left]\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right]\right)$, sowie $F_n:=f^{-1}(]n,\infty])$; diese Mengen sind meßbar. Setzt man nun $s_n:=\sum_{i=1}^{n2^n}\frac{i-1}{2^n}\chi_{E_n^i}+n\chi_{F_n}$, so hat die Treppenfunktionsfolge (s_n) ganz einfach die im Satz beschriebenen Eigenschaften.
(Man mache sich ein Bild, wie die Folge s_n z.B. für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to x^2$ und für $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\to x^2+y^2$ konkret aussieht!)

3. **Positive Maße**

Ist $(M,\mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum, so nennt man eine Abbildung $\mu:\mathfrak{A}\to[0,\infty]$ ein *positives Maß* wenn

- $\mu(\emptyset)=0$
- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter meßbarer Mengen, so gilt
  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ (σ-Additivität)

Setzt man das Maß aller meßbarer Mengen gleich Null, so hat man das *Nullmaß*.
Ist $\mathfrak{A}=\{\emptyset,M\}$, so hat man mit $\mu(\emptyset)=0$ und $\mu(M)=1$ ebenfalls ein triviales Maß.
Ist $\mathfrak{A}=\mathcal{P}(M)$ und setzt man $\mu(A)=|A|,$ mißt also die Anzahl der Elemente von *A*, so hat man damit das schon recht interessante sogenannte *abzählende Maß*.

Das für uns interessanteste Maß soll Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ihren n-dimensionalen Rauminhalt zuordnen, also z.B. Intervallen ihre Länge, geeigneten Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ ihren Flächeninhalt, geeigneten Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ ihren Rauminhalt, etc. Die Konstruktion dieses Maßes, benannt nach Henri Lebesgue, führen wir erst später durch. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß man dieses Maß nicht σ-additiv für alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definieren kann, und man sich auf eine kleinere σ-Algebra, die später zu konstruierende *Lebesguesche σ-Algebra* beschränken muß.

Ein Tripel $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ – bestehend also aus einer Menge, einer darauf definierten σ-Algebra und einem auf dieser σ-Algebra definierten Maß – nennt man auch einen *Maßraum* .

Einfache Eigenschaften von positiver Maße

Sind $A, B \in \mathfrak{A}$ disjunkt und setzt man $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$ für $n \geqslant 3$, so erhält man aus der σ-Additivität $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Genauso: Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt, so gilt $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

Sind $A, B \in \mathfrak{A}$ und $A \subset B$, so folgt $\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A)$, also $\mu(A) \leqslant \mu(B)$

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Familie meßbarer Mengen.

Setzt man $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - A_n$, so sind die (B_n) paarweise disjunkt und es gilt $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n$ und $\bigcup_n A_n = \cup_n B_n$, also $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. Nun ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$, während wieder $\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \mu(A_n)$. Insgesamt also

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Entsprechend beweist man mit Hilfe der de Morganschen Regeln: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Familie meßbarer Mengen und gilt $\exists n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) < \infty$, so folgt $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

(Man konstruiert leicht ein Beispiel mit $\forall n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) = \infty$ und $\bigcap_n A_n = \emptyset$.)

Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge meßbarer Mengen, so setzt man $\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k$, und diese Menge ist offenbar wieder meßbar. Setzt man $B_n = \bigcup_{k \geqslant n} A_k$, so ist (B_n) eine monoton fallende Familie und damit $\mu\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_n B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$.

Nun ist $A_n \subset B_n$, damit $\mu(A_n) \leqslant \mu(B_n)$ und damit $\limsup \mu(A_n) \leqslant \limsup \mu(B_n) = \lim_n \mu(B_n)$

Wäre jetzt $\limsup \mu(A_n) > \lim_n \mu(B_n)$, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ mit $\limsup \mu(A_n) - \epsilon > \lim_n \mu(B_n) + \epsilon$. Daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mu(B_{n_0}) < \lim_n \mu(B_n) + \epsilon$, also $\limsup \mu(A_n) - \epsilon > \mu(B_{n_0})$. Daher gibt es ein $k \geqslant n_0$, so daß $\mu(A_k) > \limsup \mu(A_n) - \epsilon$, insgesamt also $\mu(A_k) > \mu(B_{n_0})$. Dies ist aber wegen $A_k \subset B_{n_0}$ nicht möglich und es folgt

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \limsup \mu(A_n)$$

Analog hat man für eine beliebige Folge meßbarer Mengen auch die Formel

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = \liminf \mu(A_n)$$

Konvergiert die Folge $(\mu(A_n))$, so fallen Grenzwert, Limes Superior und Limes Inferior zusammen.

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht notwendig disjunkter meßbarer Mengen, so gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad .$$

Diese Eigenschaft eines Maßes nennt man ***Subadditivitität.***
Man zeigt dies, indem man rekursiv die folgende Folge paarweise disjunkter meßbarer Mengen definiert: $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$. Damit gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}\; B_n \subset A_n$, und daraus folgt wegen $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ die Subadditivitität.
Die Subadditivität folgt also aus der σ-Additivität.

Mengen vom Maß Null und Vervollständigung eines Maßes

Ist $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, so bezeichnen wir nicht nur eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) = 0$ als Nullmenge, sondern auch jede Teilmenge einer solchen Nullmenge, die nicht notwendigerweise in $\mathfrak{A}$ liegen muß.

Man nennt ein Maß bzw. einen Maßraum vollständig, wenn jede Nullmenge meßbar ist.

Hat man ein nicht-vollständiges Maß, so liegt es nahe, einer Menge $B \subset M$, die sich nur um eine Nullmenge von einer meßbaren Menge unterscheidet, für die es also meßbare Mengen $A, C \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\mu(C - A) = 0$, das Maß $\mu(A) = \mu(C)$ zuzuordnen.

Auf diese Weise läßt sich jedes Maß zu einem vollständigen Maß fortsetzen.
Dazu muß man zeigen, daß $\overline{\mathfrak{A}} := \{B \subset M \mid \exists\, A, C \in A\colon A \subset B \subset C \text{ und } \mu(C - A) = 0\}$ eine σ-Algebra ist und durch $\overline{\mu}(B) := \mu(A)$ ein vollständiges Maß auf $\overline{\mathfrak{A}}$ gegeben wird, vgl. Aufgabenblatt 12.

Es sei hier ohne Beweis erwähnt, daß die Borel-Algebra auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht vollständig bezüglich des Lebesgue-Maßes ist, d.h. es gibt Lebesgue-Nullmengen, die nicht Borel-meßbar sind. Zur

Konstruktion einer solchen Menge benötigt man wieder das Auswahlaxiom, ähnlich wie bei der in der Vorlesung gezeigten Konstruktion einer nicht-Lebesgue-meßbaren Menge.
Sei nun $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $f: M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Abbildung und $g: M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung, die sich nur auf einer Nullmenge N von *f* unterscheidet. Es soll gezeigt werden, daß auch *g* meßbar ist.

Man betrachte dazu $h := f - g$; *h* ist außerhalb der Nullmenge *N* die Nullfunktion. Man zeigt leicht, daß *h* meßbar ist: Ist nämlich $L \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Menge, so ist $h^{-1}(L) \subset N,$ also meßbar, falls $0 \notin L$. Falls dagegen $0 \in L$, so schreiben wir $L = K \cup \{0\}$ mit $0 \notin K$ und haben $h^{-1}(L) = h^{-1}(K) \cup h^{-1}(\{0\})$. Wieder ist $h^{-1}(K) \subset N,$ also meßbar, und $h^{-1}(\{0\}) =: P$ ist eine Obermenge von $M - N$. Es ist dann aber $M \supset P \supset M - N$, und aus der Vollständigkeit von μ folgt jetzt daß *P* meßbar ist. Damit ist $h^{-1}(L)$ in jedem Fall meßbar, also ist *h* meßbar und damit *g=f-h* meßbar.

Mit anderen Worten: ändert man eine auf einem vollständigen Maßraum definierte meßbare Funktion auf einer Nullmenge irgendwie ab, so ist die geänderte Funktion immer noch meßbar!

Man sagt, eine Eigenschaft gelte ***fast überall*,** wenn sie auf alle Punkte des Raums außerhalb einer Nullmenge zutrifft. Wir haben eben gezeigt: sind zwei Funktionen fast überall gleich, so ist die eine meßbar genau dann wenn die andere meßbar ist, ein vollständiger Maßraum vorausgesetzt. Wie wir oben gesehen haben, können wir aber jedes Maß zu einem vollständigen Maß fortsetzen.

Wir werden später Funktionen, die fast überall gleich sind, identifizieren.

Integration positiver meßbarer Funktionen

Wir gehen aus von einem positiven Maß auf *M*.

Sind $B, A \subset M$ meßbar, so setzen wir $\int_A \chi_B \, \mathrm{d}\mu := \mu(A \cap B)$.
Am Anfang steht also die Integration charakteristischer Funktionen.

Ist $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ eine positive meßbare Treppenfunktion, wobei die $\alpha_i > 0$ paarweise verschieden und die A_i paarweise disjunkt sind, so setzen wir $\int_A s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_A \chi_{A_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A \cap A_i)$.

Ist schließlich $f: M \to [0, \infty]$ meßbar, so setzen wir $\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \sup_{0 \leqslant s \leqslant f} \int_A s \, \mathrm{d}\mu$, wobei das Supremum über die Integrale aller positiven Treppenfunktionen genommen wird, die unterhalb *f* liegen.

Streng genommen müßte man jetzt zeigen, daß für den Fall, daß *f* selbst eine Treppenfunktion ist, diese Definition nicht mit der vorigen kollidiert: der einfache Beweis sei ggf. dem Leser überlassen.