Mannigfaltigkeiten (Version 19.11. 14:30)

Eine ***n*-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum, der lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist. Entsprechend könnten wir natürlich auch eine **topologische Banachmannigfaltigkeit** als einen topologischen Raum definieren, der lokal homöomorph zu einem Banachraum E ist, und in diesem Moment fällt mir kein Grund ein, dies nicht zu tun: es verkompliziert nichts. n-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind demnach spezielle Banachmannigfaltigkeiten.

Oft gebraucht man einfach nur das Wort „Mannigfaltigkeit", und meint eine topologische Banachmannigfaltigkeit. Das kommt auf den Kontext an.

Die obige Definition bedeutet: Jeder Punkt von M besitzt eine offene Umgebung U, zusammen mit einer homöomorphen Abbildung $\varphi: U \to V$ in eine offene Teilmenge $V \subset E$. Eine solche Abbildung nennt man eine (topologische) **Karte auf M**. Man kann dann etwas lax[1] sagen, jeder Punkt von M liege in einer Karte und daß die Karten, wieder lax gesprochen, eine offene Überdeckung von M bilden. Umgekehrt nennt man eine offene Überdeckung von M durch Karten einen **Atlas auf M**.

Ein Atlas auf einer topologische Mannigfaltigkeit kann natürlich durch weitere Karten ergänzt werden, und es gibt natürlich verschiedene Atlanten. Wenn einen das stört, kann man die Menge aller topologischen Karten auf M betrachten: diese bilden dann den eindeutig bestimmten *maximalen Atlas*; jeder Atlas ist offenbar Teilmenge des maximalen Atlas. Andererseits enthält der maximale Atlas sicher überabzählbar viele Karten und ist daher etwas unhandlich. In der Praxis ist man eher an Atlanten mit möglichst wenig Karten interessiert. Oft interessiert auch nicht ein gesamter Atlas, sondern nur eine spezielle Karte, die eine bestimmte Umgebung besonders schön abbildet.

Beispiele:

1. Im Extremfall gibt es einen Atlas mit nur eine Karte:
Ist z.B. $M = U \subset E$ offen und $V = U$, so haben wir mit $\varphi = id_U$ einen Homöomorphismus $\varphi: U \to V$ und damit offensichtlich einen Atlas. Also: offene Teilmengen eines Banachraums und damit natürlich auch der Gesamtraum sind Banachmannigfaltigkeiten, jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und der $\mathbb{R}^n$ selbst sind n-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

2. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist in natürlicher Weise selbst wieder eine Mannigfaltigkeit. Ist nämlich $U \subset M$ offen und ein Atlas auf M gegeben durch eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ von M mit Karten $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, und ist $J \subset I$ die Teilmenge derjenigen Indizes $\alpha \in I$ für die $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$, so ist offenbar $(U_\alpha \cap U)_{\alpha \in J}$ eine offene Überdeckung von U; als Karten nehmen wir die Einschränkungen $\varphi_\alpha : U_\alpha \cap U \to \varphi(U_\alpha \cap U)$.

3. Um den Kreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ zu einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit zu machen, benötigen wir mindestens zwei Karten. Wenn nämlich eine Karte reichte, gäbe es einen Homöomorphismus zwischen S^1 und einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$: da aber der erstere Raum kompakt ist und der zweite nicht, ist das unmöglich. Mit zwei Karten kommt man aber hin, beispielsweise so: Als Topologie auf S^1 wählt man natürlicherweise die vom $\mathbb{R}^2$ induzierte Relativtopologie; diese ist identisch mit der durch die Metrik auf S^1 induzierte Topologie, wobei die Metrik auf S^1 ihrerseits z.B. als Einschränkung der Euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^2$ auf S^1 gewählt wird. Die Teilmengen $U_1 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\}$, $U_2 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\} \subset S^1$ sind beide offen: es wird ja jeweils das Komplement einer einpunktigen, also abgeschlossenen Teilmenge von S^1 gebildet.

---

1 Richtiger wäre es zu sagen, „Jeder Punkt von M liegt im Definitionsbereich einer Karte", und die Definitionsbereiche der Karten bilden eine offene Überdeckung von M.

$\varphi_1: U_1 \to \mathbb{R}$ wird gegeben durch $(x, y) \to x/(1-y)$, $\varphi_2: U_2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \to x/(1+y)$.
Bekanntlich sind dies die stereographischen Projektionen vom Nord- und Südpol.
Jetzt ist nachzuweisen, daß es sich bei φ_1 um einen Homöomorphismus handelt; bei φ_2 verhält es sich dann entsprechend, und wir schreiben im Folgenden kurz $\varphi := \varphi_1$ und $U := U_1$.

Setzt man für $u \in \mathbb{R}$ $\psi(u) = \left(2u/(u^2+1), (u^2-1)/(u^2+1)\right)$, so hat man eine stetige Abbildung $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Man rechnet leicht nach, daß für jedes $u \in \mathbb{R}$ $\psi(u) \in S^1$, d.h. $\operatorname{Im} \psi \subset S^1$ und man rechnet genauso nach, daß $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{U_1}$. Wegen $\operatorname{Im} \psi \subset S^1$ kann man $\varphi \circ \psi$ bilden, und man rechnet leicht nach, daß $\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{R}}$. Damit ist φ bijektiv.
S^1 trägt die vom $\mathbb{R}^2$ induzierte Relativtopologie, d.h. die offenen Teilmengen von S^1 sind gerade von der Form $O \cap S^1$ mit $O \subset R^2$ offen. Jetzt ist wegen der Stetigkeit von ψ $\psi^{-1}(O) \subset \mathbb{R}$ offen, anderseits gilt wegen $\operatorname{Im} \psi \subset S^1$ $\psi^{-1}(O) = \psi^{-1}(O \cap S^1)$ und dies ist gleich $\varphi(V \cap S^1)$, d.h. φ bildet offene Mengen auf offene Mengen ab und ist daher offen.

Setzt man $W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y < 1\}$, so ist $U = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\} \subset W$. Man definiert jetzt $\tilde{\varphi}: W \to \mathbb{R}$ mit derselben Formel $\tilde{\varphi}(x, y) = x/(1-y)$ wie φ und hat damit eine Fortsetzung der Abbildung φ auf W. Offenbar ist $\tilde{\varphi}$ stetig. Damit gilt für jede offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$ $\tilde{\varphi}^{-1}(V) \subset W$ ist offen, und man hat automatisch $\varphi^{-1}(V) = S^1 \cap \tilde{\varphi}^{-1}(V)$, und dies ist offen in S^1 [2].
Damit ist φ bijektiv, offen und stetig, somit ein Homöomorphismus. (Die Topologie auf S^1 , die ja als vom $\mathbb{R}^2$ induzierte Relativtopologie gegeben war, erfordete etwas Gymnastik.)

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Man möchte für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten die Hilfsmittel der Differentialrechnung einsetzen. Dazu betrachtet man auf einer topologischen Mannigfaltigkeit die sogenannten *Kartenwechselabbildungen*: Bei zwei überlappenden Karten $\varphi_1: U_1 \to V_1$ $\varphi_2: U_2 \to V_2$ $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ nennt man $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ Kartenwechselabbildung. Eine Kartenwechselabbildung ist offenbar ein Homöomorphismus.

Sind bei gegebenem Atlas alle Kartenwechselabbildungen Diffeomorphismen, so nennt man die Mannigfaltigkeit M eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** und man spricht von einem *differenzierbaren Atlas.* Dabei kann man nach den Differenzierbarkeitsklassen der Diffeomorphismen unterscheiden. Bei C^k- Diffeomorphismen spricht man von einer C^k- Mannigfaltigkeit, bei $C^\infty-$ Diffeomorphismen auch von einer *glatten Mannigfaltigkeit*. Häufig gebraucht man aber nur den Begriff „Differenzierbare Mannigfaltigkeit“ und der Hörer oder Leser muß aus dem Kontext entscheiden, von welcher Differenzierbarkeitsklasse die Rede ist.

Die Einführung der Kartenwechselabbildungen erlaubt jetzt die Definition differenzierbarer Funktionen und differenzierbarer Abbildungen.

Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ und Karten $\varphi_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha$, sowie F ein weiterer Banachraum, so heißt eine Funktion $f: M \to F$ **differenzierbar**, wenn für alle $\alpha \in I$ die Funktionen $f \circ \varphi_\alpha^{-1}: V_\alpha \to F$ differenzierbar sind.

2 Dies gilt grundsätzlich: Ist $f: M \to N$ stetig und wird $L \subset M$ versehen mit der Relativtopologie, so ist die Einschränkung $f: L \to N$ ebenfalls stetig.

Offenbar kann man genau so auf einer C^k- Mannigfaltigkeit C^k- Funktionen erklären.

Man beachte, daß es sich bei den Funktionen $f\circ\varphi_\alpha^{-1}: V_\alpha \to F$ um „ganz normale" auf einer offenen Teilmenge eines Banachraums definierte banachraumwertige Funktionen handelt, deren Differenzierbarkeitseigenschaften ausgiebig behandelt wurden.

Auf einer nur topologischen Mannigfaltigkeit ist obige Definition einer differenzierbaren Funktion nicht sinnvoll:
Hat man auf einer topologischen Mannigfaltigkeit eine Karte $\varphi: U \to V$, so kann man zweifellos einen Homöomorphismus $\psi: V \to W$ zwischen $V, W \subset E$ definieren, so daß ψ, ψ^{-1} beide nicht differenzierbar sind. Damit ist $\tilde{\varphi}=\psi\circ\varphi: U \to W$ trotzdem eine topologische Karte. Ist dann $f\circ\varphi^{-1}$ differenzierbar, so wird es $f\circ\tilde{\varphi}^{-1}=(f\circ\varphi^{-1})\circ\psi^{-1}$ als Verknüpfung einer differenzierbaren mit einer nicht-differenzierbaren Abbildung i.a. nicht sein, d.h. die Definitionsbedingung für eine differenzierbare Funktion läßt sich nicht erfüllen. In diesem Fall ist aber gerade die Kartenwechselabbildung $\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}=\varphi\circ(\psi\circ\varphi)^{-1}=\varphi\circ(\varphi^{-1}\circ\psi^{-1})=\psi^{-1}$ nicht differenzierbar, was bei einer (nur) topologischen Mannigfaltigkeit legitim ist, bei einer differenzierbaren aber nicht.

Also nochmal: erst die Differenzierbarkeit der Kartenwechselabbildungen macht die Definition „differenzierbare Funktion" auf einer Mannigfaltigkeit sinnvoll.

Wir können natürlich auch von differenzierbaren Funktionen auf offenen Teilmengen einer Manngifaltigkeit sprechen: Ist $U \subset M$ offen, so ist $f: U \to F$ differenzierbar (bzw. C^k, C^∞), wenn für jedes $\alpha \in I$ mit $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ $f\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to F$ differenzierbar (bzw. C^k, C^∞) ist.

Jede differenzierbare Karte $\varphi: U \to V \subset E$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist jetzt differenzierbar. Ist $f: V \to F$ differenzierbar, so offenbar auch $f\circ\varphi$.

Ist $U \subset M$ offen, so ist die Menge $\mathcal{D}(U, F)$ der differenzierbaren Funktionen $U \to F$ offenbar selbst in natürlicher Weise ein Vektorraum, dessen topologische Struktur erst später betrachtet werden soll. Funktionen in $\mathcal{D}(U, R)$ kann man sogar multiplizieren.
Entsprechend definiert für C^k - Mannigfaltigkeiten die Räume $C^k(U, F), C^k(U, R)$.

Differenzierbare Struktur
Wir haben gerade gesehen, daß es auf einer topologischen Mannigfaltigkeit Karten geben muß, bei denen die Kartenwechselabbildungen nicht differenzierbar sind. Genauso kann es auf einer topologischen Mannigfaltigkeit Atlanten geben, wobei zwar die Kartenwechsel innerhalb ein und desselben Atlas differenzierbar sind, Kartenwechsel zwischen den Atlanten aber nicht. Dann hätte man differenzierbare Funktionen bezüglich eines Atlas, die bezüglich dem anderen nicht differenzierbar sind. Das müßte heißen, daß verschiedene Atlanten verschiedene „differenzierbare Strukturen erzeugen können.
Das kann man präzisieren, indem man zwei differenzierbare Atlanten als äquivalent definiert, wenn ihre Kartenwechselabbildungen auch untereinander differenzierbar sind. Aus den obigen Beispielen ist klar, daß es durchaus nicht-äquivalente Atlanten geben kann.
Indem man zu einem Atlas eine Karte hinzufügt, so daß alle neu hinzukommenden Kartenwechsel Diffeomorphismen sind, erhält man einen äquivalenten Atlas. Die hinzukommende Karte nennt man dann *kompatibel* . Vereinigt man einen Atlas mit allen zu ihm kompatiblen Karten, erhält man äquivalenten Atlas, der in dem Sinne maximal ist, daß man ihm keine weiteren kompatiblen Karten

hinzufügen kann. Jede Äquivalenzklasse von Atlanten enthält dann genau einen maximalen Atlanten. Da verschieden Äquivalenzklassen zu verschiedenen differenzierbaren Abbildungen führen, ist es sinnvoll, jede dieser Äquivalenzklassen bzw. jeden maximalen Atlas eine *differenzierbare Struktur* auf der Mannigfaltigkeit zu nennen. Mit einem differenzierbaren Atlas legt man also eine differenzierbare Struktur fest und damit auch die Menge der differenzierbaren Funktionen.
Wie vorher wird man in der Praxis mit Atlanten arbeiten wollen, die möglichst wenig Karten besitzen. Für spezielle Untersuchungen wird man aber spezielle kompatible Karten wählen.

Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten
1. Jede topologische Mannigfaltigkeit mit nur einer Karte ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, denn es gibt ja nur eine Kartenwechselabbildung, und die ist die Identität, also differenzierbar. Damit sind alle offenen Teilmengen von Banachräumen, und die Banachräume selbst differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Umgekehrt ist jedes homöomorphe Bild einer offenen Teilmenge von *E* demnach ebenfalls in natürlicher Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

2. Wir haben oben gezeigt, daß der Kreis S^1 eine topologische Manngifaltigkeit ist, indem wir einen Atlas mit 2 Karten – stereographischen Projektionen – angegeben haben. Damit S^1 eine differenzierbare Mannigfaltig ist, muß die nicht-triviale Kartenwechselabbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ein Diffeomorphismus sein. Zunächst stellen wir dazu fest, daß $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} - \{0\}$ ist. Ist dann $u \in \mathbb{R}$, $u \neq 0$, so ist $\varphi_1^{-1}(u) = \left(2u/(u^2+1), (u^2-1)/(u^2+1)\right)$, also
$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(u) = \dfrac{2u/(u^2+1)}{1+(u^2-1)/(u^2+1)} = \dfrac{2u}{(u^2+1)+(u^2-1)} = \dfrac{1}{u}$, und dies ist tatsächlich ein Diffeomorphismus $(\mathbb{R} - \{0\}) \to (\mathbb{R} - \{0\})$.

3. **Produktmannigfaltigkeit**: Seien *M* , *N* Manngifaltigkeiten wobei die Karten von *M* ihre Bilder im Banachraum *E* und die Karten von *N* ihre Bilder im Banachraum *F* haben. Ist durch die Karten $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ ein differenzierbarer Atlas auf *M* und durch die Karten $\tilde{\varphi}_\beta : \tilde{U}_\beta \to \tilde{V}_\beta$ ein differenzierbarer Atlas auf *N* gegeben, so durch $\varphi_\alpha \times \tilde{\varphi}_\beta : U_\alpha \times \tilde{U}_\beta \to V_\alpha \times \tilde{V}_\beta \subset E \times F$ [3]ein differenzierbarer Atlas auf $M \times N$. Die Karten von $M \times N$ haben also ihre Bilder in $E \times F$.

Differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten
Wir haben oben differenzierbare „Funktionen" auf *M* erklärt, also Abbildungen, deren Werte in einem Banachraum liegen. Diese Definition soll erweitert werden auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten.
Seien dazu *M, N* Banachmannigfaltigkeiten, wobei die Karten von *M* ihre Bilder im Banachraum *E* und die Karten von *N* ihre Bilder im Banachraum *F* haben. Eine stetige Abbildung $f: M \to N$ heißt **differenzierbar** (bzw. C^k, C^∞), wenn gilt:
Betrachtet man ein beliebiges $x \in M$ und wählt eine differenzierbare Karte $\varphi: U \to V$ mit $x \in U$ bezüglich M , sowie eine differenzierbare Karte $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \to \tilde{V}$ bezüglich N so daß $f(U) \subset \tilde{U}$, so ist die Abbildung $\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}: V \to \tilde{V}$ differenzierbar (bzw. C^k, C^∞) in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\varphi(x)$.

Bemerkungen
Geht man aus von einem Punkt $x \in M$, so liegt der Bildpunkt $y = f(x)$ ja sicher im Definitionsbereich einer Karte $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \to \tilde{V}$ von N und *x* selbst liegt im Definitionsbereich einer Karte $\varphi: U_1 \to V_1$ von M . Wegen der Stetigkeit von *f* in *x* gibt es jetzt eine offene Umgebung

3 Dabei ist $(\varphi_\alpha \times \tilde{\varphi}_\beta)(x, y) := \left(\varphi_\alpha(x), \tilde{\varphi}_\beta(y)\right)$.

$U_2(x) \subset M$ mit $f(U_2) \subset \tilde{U}$. Setzt man jetzt $U = U_1 \cap U_2$, so ist offenbar $\varphi : U \to \varphi(U) =: V \subset V_1$ ebenfalls eine Karte, und es gilt $f(U) \subset \tilde{U}$. Die Voraussetzungen in obiger Definition lassen sich also jedenfalls erfüllen. Andererseits erhebt die Definition die Differenzierbarkeitsforderung für die potentiell unendlich vielen Karten, die die Voraussetzungen erfüllen, und diese Überprüfung könnte schwierig sein. Der folgende Satz zeigt, daß man jeweils nur eine Karte benötigt:

Satz: Seien *M, N* Banachmannigfaltigkeiten wie oben. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ ist differenzierbar (bzw. C^k, C^∞), wenn gilt:
Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Karte $\varphi : U \to V$ bezüglich *M* mit $x \in U$ und eine Karte $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ bezüglich *N* so daß $f(U) \subset \tilde{U}$ und $\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to \tilde{V}$ ist differenzierbar (bzw. C^k, C^∞) in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\varphi(x)$.

Beweis: Man betrachtet beliebige andere Karten um *x* und *f* (*x*), bringt die differenzierbaren Kartenwechselabbildungen ins Spiel und erhält das Ergebnis. (Wird ggf. nochmal ausführlicher gemacht, ist aber im Prinzip sehr einfach.)

Beispiele für differenzierbare Abbildungen

Differenzierbare Funktionen
Konstante Abbildungen
Identische Abbildung: $\mathrm{id}_M : M \to M$; $U \subset M$ offen: die Inklusionsabbildung $U \to M$
Projektion: $M \times N \to M$
Injektion: $M \to M \times N$, $x \to (x, y_0)$ für ein festes $y_0 \in N$.
Sind $f_1 : M_1 \to N_1,\ f_2 : M_2 \to N_2$ differenzierbar, so auch $(f \times g) : M_1 \times N_1 \to M_2 \times N_2$.
Sind $f : M \to N,\ g : N \to L$ differenzierbar, so auch $g \circ f$.
$\mathbb{R}^n - \{0\} \to S^{n-1},\ x \to x / \|x\|$, $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n,\ x \to \overline{x}$, $S^1 \to S^1, z \to z^2$,
$S^3 \to S^3, a \to a^2$ (Quaternionenquadrat)

Alles Übungsaufgaben.