Inverse Abbildung II

Erinnern wir uns an die

> **Ableitung einer Inversen Abbildung**
>
> Seien *E,F* Banachräume, $U \subset E$ offen, $V \subset F$ offen, $f: U \to V$, $g: V \to U$ seien invers zueinander, *f* sei in $x_0 \in U$ differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) \in \mathscr{L}(E, F)$.
>
> Wenn die Ableitung eine Inverse in $\mathscr{L}(F, E)$ besitzt, so ist *g* in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt: $Dg(y_0) = \left(Df(x_0)\right)^{-1}$.

Es wäre schön, wenn man die Existenz der Inversen Abbildung *g* in der Voraussetzung fallen lassen und diese Tatsache im Wesentlichen schon aus der Invertierbarkeit der Ableitung $Df(x_0)$ folgern könnte. Tatsächlich kann man zeigen:

Satz

Seien *E,F* Banachräume, $\tilde{U} \subset E$ offen, $f: \tilde{U} \to F$ sei in $\tilde{U}$ stetig differenzierbar, und für $x_0 \in \tilde{U}$ besitze die Ableitung $Df(x_0) \in \mathscr{L}(E, F)$ eine Inverse im Raum $\mathscr{L}(F, E)$.

Dann gibt es offene Umgebungen $U(x_0) \subset \tilde{U}$ und $V\left(f(x_0)\right)$, so daß $f: U \to V$ [1] bijektiv ist.

Zusatz:

Allein aus der Stetigkeit von *Df* folgt dann schon, daß *U* hinreichend klein gewählt werden kann, daß für alle $x \in U$ die Ableitung $Df(x)$ eine stetige Inverse besitzt.

Mit dem Satz über die Ableitung einer Inversen Abbildung folgt sofort, daß die „lokale Inverse" $g: V \to U$ differenzierbar ist mit Ableitung $Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$. Diese Formel impliziert, daß mit *f* auch *g* stetig differenzierbar ist[2].

Beweis des Zusatzes

In Aufgabenblatt 1 wurde gezeigt, daß $\mathrm{Inv}(E, F) := \left\{\varphi \in \mathscr{L}(E, F) \middle| \varphi \text{ bijektiv}, \varphi^{-1} \text{stetig}\right\}$ offen in $\mathscr{L}(E, F)$ ist. $Df: \tilde{U} \to \mathscr{L}(E, F)$ ist stetig vorausgesetzt, und weil $Df(x_0) \in \mathrm{Inv}(E, F)$ ist auch $Df(x) \in \mathrm{Inv}(E, F)$ für $x \in U(x_0)$, wenn letztere Umgebung hinreichend klein gewählt wird.

Außerdem läßt sich $Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$ interpretieren als $Dg = \mathrm{Inv} \circ Df \circ g$! Dabei ist $g: V \to U$, $Df: U \to \mathrm{Inv}(E, F)$, und $\mathrm{Inv}: \mathrm{Inv}(E, F) \to \mathrm{Inv}(F, E)$ die Invertierungs-abbildung . In Aufgabenblatt 2 wird gezeigt, daß letztere stetig ist. Insgesamt ist damit *Dg* als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig.

---

1 Streng genommen dürfte man diese Abbildung nicht mehr *f* nennen: Definitionsbereich und Bildbereich wurden ja verkleinert. Wir scheuen aber die dann notwendige unübersichtlichere Notation.

2 Betrachtet man den Beweis des Zusatzes genauer, so könnte man unschwer darüber hinaus auch für $k \geq 2$ zeigen, daß mit *f* auch *g* *k*-mal stetig differenzierbar ist.

Bemerkungen und Folgerungen

1. **Lokale Eigenschaften**

Man nennt eine Eigenschaft **„lokal"** , wenn sie in hinreichend kleinen Umgebungen jedes Punktes gilt. Ist z.B. $U \subset R$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f **„lokal beschränkt"**: Ist nämlich $x \in U$ und ist $U_\epsilon(x) \subset U$, so ist die abgeschlossene Kugel $B_{\epsilon/2}(x) \subset U_\epsilon(x)$ kompakt und daher f beschränkt auf $U_{\epsilon/2}(x) \subset B_{\epsilon/2}(x)$, also auf einer offenen Kugel um x. Entsprechend nennt man eine Abbildung $f: M \to N$ zwischen topologischen Räumen **„lokal injektiv"**, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U gibt, so daß $f: U \to N$ injektiv ist. Bekanntlich nennt man eine bijektive, offene und stetige Abbildung einen Homöomorphismus. Wiederum entsprechend nennt man $f: M \to N$ einen **„lokalen Homömorphismus"** wenn es ", wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U gibt, so daß $f(U) =: V$ offen in N und $f: U \to V$ ein Homöomorphismus ist.

Sind E, F Banachräume, $U \subset E$ offen. Ist $f: U \to F$ stetig, so spricht man von einer C^0 **-Abbildung** . Man nennt f eine C^1 **-Abbildung** , wenn f stetig differenzierbar ist, eine C^k **-Abbildung**, wenn f k-mal stetig differenzierbar und eine C^∞ **-Abbildung** , wenn f beliebig oft differenzierbar ist.

Ist $V \subset F$ offen und $f: U \to V$, so nennt man f einen **Diffeomorphismus**, wenn f ein Homömorphismus ist und f und f^{-1} beide differenzierbar sind. Entsprechend definiert man C^k **-Diffeomorphismus** und C^∞ **-Diffeomorphismus**.

Analog zu lokalen Homömorphismen definiert man dann **lokale Diffeomorphismen**.

Es reicht also eine relativ einfach zu prüfende Bedingung an die Ableitungen einer Abbildung in derUmgebung eines Punktes zum Nachweis der Bijektivität der Abbildung in einer ggf. kleineren Umgebung. Ist z.B. $E = F = \mathbb{R}^n$, so ist neben den Differenzierbarkeitsbedingungen nur zu prüfen, ob $\det Df(x_0) \neq 0$. Dies wird sogar "meistens" der Fall sein!

Auf diesem Hintergrund lassen sich obiger Satz und Zusatz im Wesentlichen so formulieren:

> Sind E,F Banachräume, $U \subset E$ offen, $f: U \to F$ sei C^1 stetig differenzierbar; für $x \in U$ besitze die Ableitung $Df(x) \in \mathscr{L}(E, F)$ eine Inverse im Raum $\mathscr{L}(F, E)$.
>
> Dann ist f ein lokaler C^1- Diffeomorphismus.

2. **Beispiel einer lokal injektiven Abbildung, die nicht injektiv ist.**

Selbst wenn für alle $x \in \widetilde{U}$ die Ableitungen $Df(x)$ eine Inverse in $\mathscr{L}(F, E)$ besitzen, kann man nicht folgern, daß f auf ganz $\widetilde{U}$ injektiv ist.
Beispiel: $\widetilde{U} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $f: \widetilde{U} \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$; f ist offenbar beliebig oft differenzierbar. (Man sollte in f die komplexe Abbildung $z \to z^2$ erkennen.) Es gilt $Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, daher $\det Df(x, y) = 4(x^2 + y^2) \neq 0$, d.h.

$Df(x,y)$ ist tatsächlich für alle $(x,y)\in\widetilde{U}$ invertierbar. (Alle linearen Abbildungen auf einem endlichdimensionalen Raum sind stetig.) *f* ist aber nicht injektiv, den z.B. gilt $(1{,}0)=f(1{,}0)=f(-1{,}0)$. Nehmen wir aber z.B. $(x_0,y_0)=(1{,}0)$ und $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x>0\}\subset\widetilde{U}$, also die rechte Halbene, und setzen $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\leqslant 0\rightarrow y\neq 0\}$, nehmen also die negative *x*-Achse aus $\mathbb{R}^2$ heraus, so läßt sich direkt zeigen (Übungsaufgabe!), daß $f:U\rightarrow V$ bijektiv ist.

Ein solches Beispiel hätte sich im Eindimensionalen nicht konstruieren lassen: Ist $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung auf einem offenen Intervall, deren Ableitung nirgends verschwindet, so ist sie injektiv, die Bildmenge $J=f(I)\subset\mathbb{R}$ ist ebenfalls ein offenes Intervall, so daß $f:I\rightarrow J$ eine differenzierbare Umkehrabbildung *g* besitzt, mit $g'(y)=(f'(g(y)))^{-1}$. (Übungsaufgabe!) Eine lokal injektive Abbildung auf einem Intervall ist injektiv. In höheren Dimensionen gilt dies nicht, wie obiges Beispiel zeigt.

Zum Schluß:
Beweis des Satzes:

Voraussetzungen:
E,F sind Banachräume, $\widetilde{U}\subset E$ offen, $f:\widetilde{U}\rightarrow F$ ist in $\widetilde{U}$ stetig differenzierbar, und für $x_0\in\widetilde{U}$ besitzt die Ableitung $Df(x_0)\in\mathscr{L}(E,F)$ eine Inverse im Raum $\mathscr{L}(F,E)$.

Zunächst soll begründet werden, wieso man ohne Beschränkung der Allgemeinheit von den Vereinfachungen $x_0=0\in E$, $f(x_0)=0\in F$ und $Df(x_0)=\mathrm{id}_E$ ausgehen kann.

Sind nämlich $\psi:F\rightarrow F$, $\varphi:E\rightarrow E$, $\chi:F\rightarrow E$ gegeben durch $\psi(y):=y-f(x_0)$, $\varphi(x):=x-x_0$ und $\chi:=Df(x_0)^{-1}$, und setzt man $g:=\chi\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ und $\widetilde{\widetilde{U}}:=\varphi^{-1}(\widetilde{U})$, so ist $g:\widetilde{\widetilde{U}}\rightarrow E$, $g(0)=0$ und $Dg(0)=\mathrm{id}_E$. Die Abbildungen ψ,χ,φ und ihre Inversen sind sämtlich linear bzw. affin und daher beliebig oft differenzierbar, die Ableitungen von ψ,φ sind die Identität auf *E* bzw. *F* . Daß $Dg(0)=id_E$ gilt, sieht man sofort mit Hilfe der Kettenregel. Alle Aussagen, die man für *g* erhält, kann man dann via $f=\psi^{-1}\circ\chi^{-1}\circ g\circ\varphi$ für *f* zurückübersetzen.

Zur Vereinfachung der Notation gehen wir also ab jetzt von den genannten Vereinfachungen schon für *f* aus.
Bilden wir die Hilfsfunktion $h:\widetilde{U}\rightarrow E$, $h:=\mathrm{id}-f$, so folgt sofort $Dh(0)=0$ [3].
Da *Dh* stetig ist, gibt es ein $r>0$, so daß einerseits die offene Kugel mit Radius 2*r* um Null in $\widetilde{U}$ liegt und außerdem $\forall x\in U_{2r}:\|Dh(x)\|\leqslant 1/2$. Da diese Kugel konvex ist, folgt für alle $x,y\in U_{2r}(0)$ $\|h(x)-h(y)\|\leqslant\sup_{\zeta\in[x,y]}\|Dh(\zeta)\|\|x-y\|\leqslant 1/2\|x-y\|$. Dies deutet auf eine Kontraktion hin, und wir präparieren alles so, daß gleich der Banachsche Fixpunktsatz zum Einsatz kommen kann. Dazu bildet man zuerst für $y\in U_{r/2}$ und $x\in B_r$ (abgeschlossene Kugel) den Wert $h_y(x)=y+h(x)$ und schätzt ab: $\|h_y(x)\|=\|y+h(x)\|\leqslant\|y\|+\|h(x)-g(0)\|<r/2+(1/2)r=r$, also $h_y:B_r\rightarrow U_r\subset B_r$. Ebenso gilt natürlich für $x,z\in B_r$ $\|h_y(x)-h_y(z)\|\leqslant 1/2\|x-y\|$.
h_y ist also eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum B_r und besitzt daher einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x\in B_r$. Wir haben aber gezeigt, daß $h_y(x)\in U_r$, also ist $x=h_y(x)\in U_r$. Die Fixpunktgleichung $h_y(x)=x$ ist offenbar äquivalent zur Gleichung $f(x)=y$, d.h. zu jedem gegebenem $y\in U_{r/2}$ haben wir in U_r ein eindeutig bestimmtes *x* konstruiert mit $f(x)=y$.

3 Man denke daran, daß die linke Null das Nullement von *E* ist, die rechte dagegen die Nullabbildung $E\rightarrow E$.

Ist $x \in U_r(0)$, so gilt $\|f(x)\| - \|x\| \leqslant \|x - f(x)\| = \|h(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leqslant 1/2 \|x\|$, und daraus folgt $\|f(x)\| < 3r/2$, anders ausgedrückt: $f(U_r) \subset U_{3r/2}$, bzw. $f: U_r \to U_{3r/2}$. Wegen der Stetigkeit von f auf U_r ist $U := f^{-1}(U_{r/2}) = \{x \in U_r \mid f(x) \in U_{r/2}\} \subset U_r$ selbst eine offene Umgebung von 0, und es gilt $f(U) \subset U_{r/2}$.

Setzen wir jetzt $V := U_{r/2}$, so können wir leicht zeigen, daß $f: U \to V$ bijektiv ist, und dies war das Ziel!
Surjektiv: Zu $y \in U_{r/2} = V$ haben wir oben ein eindeutig bestimmtes $x \in U_r$ konstruiert mit $f(x) = y$, also $x \in U$.
Injektiv: gäbe es verschiedene Punkte $x, z \in U$ mit $f(x) = f(z) =: y \in U_{r/2}$ so wären x und z verschiedene Fixpunkte von h_y in U_r: Widerspruch zum Fixpunktsatz.