Satz über Implizite Funktionen

Seien *E,F* Banachräume, $U \subset E$ und $f: U \to F$ eine Abbildung.
Bildet man jetzt $F: U \times F \to F$, $F(x,y) := y - f(x)$ so ist das Nullstellengebilde von F , also die Menge $\{(x,y) \in U \times F \mid F(x,y) = 0\}$ offenbar gleich dem Graphen von von f.
Es gilt $\forall x \in U: F(x, f(x)) = 0$.

Man mache sich dies klar am Beispiel $U = E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $F(x,y) = y - x^2$.

Offenbar kann hier man aus dem Nullstellengebilde von *F* die Abbildung *f* eindeutig rekonstruieren.

Eben wurde die Abbildung *f* vorgegeben und daraus die Abbildung *F* gebildet.
Wir stellen uns jetzt die umgekehrte Aufgabe, geben *F* vor und versuchen, aus dem Nullstellengebilde von *F* die aus dem Nullstellengebilde die Abbildung *f* zu extrahieren

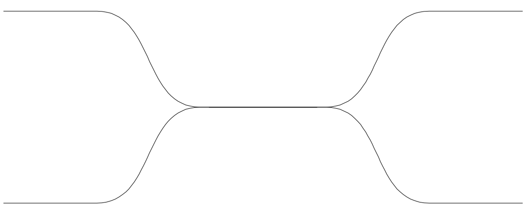
Gegeben sei also eine offene Teilmenge $W \subset E \times F$, eine Abbildung $F: W \to F$, ein Punkt $(x_0, y_0) \in W$ mit $F(x_0, y_0) = 0$. Gesucht ist eine offene Umgebung $U(x_0)$ und eine Abbildung $f: U \to F$ mit $f(x_0) = y_0$ und $\forall x \in V: (x, f(x)) \in W$ und $F(x, f(x)) = 0$, außerdem erhebt sich die Frage, inwieweit *f* eindeutig bestimmt ist.

Beispiele:
1. $E = F = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = x^2 + y^2$, $x_0 = y_0 = 0$. Das Nullstellengebilde von *F* besteht ausschließlich aus dem Punkt (0,0). Da es für kein $x \neq 0$ ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $F(x,y) = 0$, kann man für $x \neq 0$ keine Funktionswerte $f(x)$ finden mit $F(x, f(x)) = 0$.

2. $E = F = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = x$, $x_0 = y_0 = 0$. Das Nullstellengebilde von *F* ist die *y*-Achse. Wieder kann man für $x \neq 0$ keine Funktionswerte $f(x)$ finden mit $F(x, f(x)) = 0$.

3. $E = F = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = x^2 - y^2$, $x_0 = y_0 = 0$. Das Nullstellengebilde besteht aus 2 aufeinander senkrecht stehenden Geraden, die die x-Achse im Winkel von 45° und 135° schneiden. Man sieht sofort, daß es 4 Abbildungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, mit $\forall x \in \mathbb{R}: F(x, f(x)) = 0$, nämlich $f_1(x) = x,\ f_2(x) = -x,\ f_3(x) = |x|,\ f_4(x) = -|x|$. (Man mache die entsprechenden Skizzen.)

4. Man kann eine beliebig oft differenzierbare Abbildung $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstruieren deren Nullstellengebilde etwa so aussieht (die 4 Schenkel denke man sich ins Unendliche verlängert):



Denkt man sich im Zentrum den Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ und das horizontale Mittelstück auf der *x*-Achse liegend, und beschränkt man das offene Intervall *I* auf diejenigen *x* im horizontalen Mittelstück, so ist eine Funktion *f* mit $f(x_0) = y_0$ und $\forall x \in I: F(x, f(x)) = 0$ eindeutig bestimmt durch $f(x) = 0$. Vergrößert man das Intervall über die Verzweigungspunkte hinaus, gibt es wieder mehrere mögliche Abbildungen.

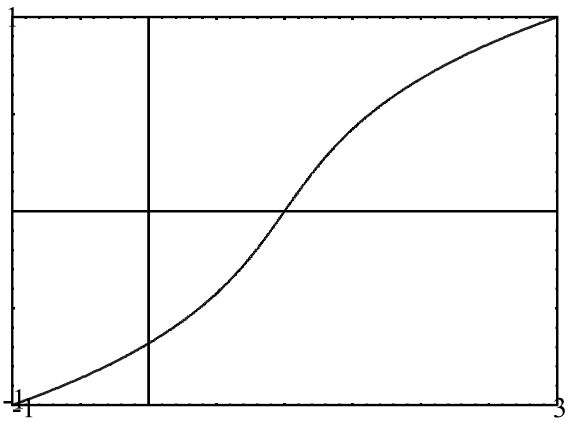
5. Als Extremfall betrachte man die Nullabbildung $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist dann $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, so gilt für jedes $f: I \to \mathbb{R}$ $\forall x \in I: F(x, f(x)) = 0$.

Nach diesen Beispielen sind wir reif für die **Definition**:

Seien *E,F* Banachräume, $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, $U(x_0), V(y_0)$ offene Umgebungen und $F : U \times V \to F$ eine Abbildung mit $F(x_0, y_0) = 0$.
Wenn es eine eindeutig bestimmte Abbildung $f : U \to V$ gibt mit $\forall x \in U : F(x, f(x)) = 0$, so sagt man, *f* sei durch *F* in einer Umgebung von x_0 **implizit definiert**.
Eine **explizite Definition** von *f* würde eine Formel oder sonstige Definitonsvorschrift für *f* (*x*) bei gegebenem *x* verlangen.

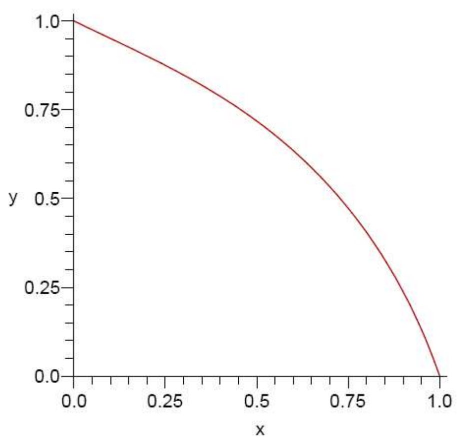
Es soll also das Nullstellengebilde von *F* in einer geeigneten Umgebung von (x_0, y_0) als Graph der implizit definierten Abbildung interpretiert werden.
Der Vorteil einer impliziten Definition liegt oft darin, daß die Abbildung *F* , durch die *f* implizit definiert wird, relativ einfach sein kann, während eine explizite Beschreibung von *f* schwierig ist.

Als Beispiel betrachten wir $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) := x - (y^3 + y + 1)$



Oben wird das Nullstellengebilde von *F* im Rechteck $]-1,3[\times]-1,1[$ dargestellt. Offenbar wird implizit eine Funktion $f :]-1,3[\to]-1,1[$ definiert. Um aber z.B. den Wert $f(0)$ explizit zu bestimmen, müßten wir ein *y* finden mit $y^3 + y + 1 = 0$, also eine Gleichung dritten Grades lösen.

Betrachten wir schließlich noch $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) := x^3 + xy + y^2 - 1$.
Das Nullstellengebilde von *F* in $]0,1[\times]0,1[$ sieht so aus:



Offenbar wird dadurch eine implizite Funktion $f :]0,1[\to]0,1[$ definiert, deren explizite Definition man gar nicht mehr hinschreiben kann.

Man möchte nun entscheiden können, unter was für Bedingungen eine eindeutige implizit definierte Funktion vorliegt und wie man diese ggf. differenzieren kann. Dazu der

Satz
(über implizite Funktionen)

Sind *E,F* Banachräume, ist $W \subset E \times F$ offen mit $(x_0, y_0) \in W$, ist $F : W \rightarrow F$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $F(x_0, y_0) = 0$ mit $DF(x_0, y_0) = \left(D_1 F(x_0, y_0), D_2 F(x_0, y_0)\right)$, wobei $D_1 F(x_0, y_0) \in \mathscr{L}(E, F)$, $D_2 F(x_0, y_0) \in \mathscr{L}(F, F)$.

Besitzt die „partielle Ableitung“ $D_2 F(x_0, y_0) \in \mathscr{L}(F, F)$ eine stetige Inverse, so gibt es eine offene Umgebung $U(x_0)$ und eine eindeutig bestimmte Abbildung $f : U \rightarrow F$ mit $f(x_0) = y_0$ und $\forall x \in U : (x, f(x)) \in W$ und $F(x, f(x)) = 0$, also eine in *U* eindeutig bestimmte implizite Funktion, die in *U* stetig differenzierbar ist, wobei in x_0 gilt:

$$Df(x_0) = -\left(D_2 F(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ D_1 F(x_{0,} y_0) \ .$$

Vor dem Beweis, der letztlich ein einfaches Korollar des Satzes über die Inverse Abbildung ist, sollte man alle vorherigen Beispiele im Lichte der Aussagen des Satzes untersuchen.

Beweis:
Man definiere $\Phi : W \rightarrow E \times F$ durch $\Phi(x, y) := (x, F(x, y))$. Φ ist offenbar differenzierbar, und es gilt: $D\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_E & 0 \\ D_1 F(x_0, y_0) & D_2 F(x_0, y_0) \end{pmatrix}$; diese stetige lineare Abbildung besitzt die folgende stetige Inverse $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_E & 0 \\ -\left(D_2 F(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ D_1 F(x_0, y_0) & \left(D_2 F(x_0, y_0)\right)^{-1} \end{pmatrix}$, wie man sofort nachrechnet. Also garantiert der Satz über die Inverse Abbildung die Existenz offener Umgebungen W_1 von (x_0, y_0) und $\widetilde{W_1}$ von $\Phi(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, zwischen denen Φ eine diffeomorphe Abbildung ist. In die Umgebung $W_1(x_0, y_0)$ kann man ein offenes „Rechteck“ der Form $U(x_0) \times Z(0)$ legen. Auf $U \times Z$ ist also $\Psi := \Phi^{-1}$ stetig differenzierbar und besitzt die Form $\Psi = (\mathrm{id}_E, \Psi_2)$. Die Abbildung $f : U \rightarrow F$, definiert durch $x \rightarrow (x, 0) \rightarrow \Psi_2(x, 0)$, ist per Kettenregel differenzierbar, und offenbar hat man, wie gewünscht,

$$\forall x \in U : F(x, f(x)) = F(\Psi(x, 0)) = 0 \ .$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhält man aus dieser letzten Aussage für $x \in U$ zwangsläufig die Formel $Df(x) = -\left(D_2 F(x, f(x))\right)^{-1} \circ D_1 F(x, f(x))$ und kann jetzt aus der Stetigkeit von DF in *W* die Stetigkeit von *Df* in *U* folgern. Außerdem folgt aus der Tatsache, daß die Zuordnung $f(x_0) = y_0$ und die Ableitung von *f* festliegt, daß *f* in einer konvexen[1] Umgebung von x_0 eindeutig bestimmt ist.

Im Aufgabenblatt 2 werden verschiedene Beispiele dazu gerechnet.

---

1 Ist $U :=]-1,1[\cup]2,3[$ ist nicht konvex. Ist f_1 identisch Null, während f_2 auf dem ersten Teilintervall identisch Null und auf dem zweiten identisch Eins ist, so haben beide Funktionen in Null denselben Wert und in ganz *U* die gleiche Ableitung, sind aber offenbar nicht gleich.